ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVIII.

1911

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XX.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1911

Fisica. — *Azione elettromagnetica d'un disco percorso da corrente radiale e disposto in un campo.* Nota di O. M. Corbino, presentata dal Socio P. Blaserna.

In un lavoro presentato all'Accademia nella precedente seduta ebbi a dimostrare che un disco circolare di bismuto, percorso da correnti radiali e disposto in un campo ad esso normale, si trasforma in una particolare lamina magnetica, capace di esercitare un'azione induttiva su una bobina che circonda il disco.

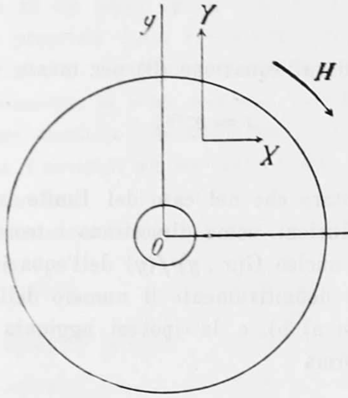

Fig. 1.

Mi propongo adesso di ricercare, sulla base della teoria elettronica della conducibilità nei metalli, quali siano le previsioni della teoria sull'effetto osservato, confrontandole con i risultati dell'esperienza, e come l'effetto stesso dipenda dalle costanti specifiche del metallo.

1. Seguendo le notazioni del Drude [1], con la sola modificazione di adottare in tutto le unità elettromagnetiche, indichiamo con e il valore assoluto della carica elettrica posseduta dagli ioni positivi e negativi; con N_1 e N_2 i numeri rispettivi di ioni liberi per centimetro cubo, con ev_1 ed ev_2 le velocità costanti acquistate dagli ioni sotto l'azione di una campo elettrico 1, e quindi con

$$\sigma_1 = e^2 N_1 v_1 \quad , \quad \sigma_2 = e^2 N^2 v^2$$

le conducibilità parziali delle due specie di ioni; sarà:

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$$

la conducibilità complessiva del metallo. Siano, infine, r_1 ed r_2 i raggi, interno ed esterno, che limitano l'anello di bismuto, disposto nel campo nor-

[1] Drude, Ann. d. Physik., *3*, pag. 370 (1900).

male H; e questo sia prodotto da una corrente che circola nel senso della freccia (fig. 1).

Sotto l'azione della forza elettrica, le cui componenti secondo gli assi indicheremo con X, Y, e dell'azione elettromagnetica, gli ioni positivi acquisteranno una velocità le cui componenti $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ saranno rilegate dalle equazioni:

$$(1)\qquad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ev_1\left(\mathrm{X} + \mathrm{H}\,\frac{dy}{dt}\right) \\ \frac{dy}{dt} &= ev_1\left(\mathrm{Y} - \mathrm{H}\,\frac{dx}{dt}\right) \end{aligned}$$

o anche dalle altre che si ottengono combinandole insieme:

$$\frac{dx}{dt}\,(1 + \mathrm{H}^2e^2v_1^2) = ev_1(\mathrm{X} - \mathrm{H}ev_1\mathrm{Y})$$

$$\frac{dy}{dt}\,(1 + \mathrm{H}^2e^2v_1^2) = ev_1(\mathrm{Y} + \mathrm{H}ev_1\mathrm{X})$$

Avremo così, come equazione della traiettoria,

$$(2)\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\mathrm{Y} + \mathrm{H}ev_1\mathrm{X}}{\mathrm{X} - \mathrm{H}ev_1\mathrm{Y}}$$

Si osservi intanto che il potenziale elettrico essendo una funzione monodroma, e tutte le azioni essendo simmetriche rispetto all'asse del disco e del campo, *le linee equipotenziali continueranno ad avere la forma circolare posseduta in assenza del campo*. La forza *elettrica* sarà adunque radiale, e avremo, indicando con $f(r)$ una funzione della distanza r dal centro,

$$\mathrm{X} = f(r)\,\frac{x}{r} \qquad \mathrm{Y} = f(r)\,\frac{y}{r}.$$

Con ciò, la (2) diviene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + \mathrm{H}ev_1\,x}{x - \mathrm{H}ev_2\,y}$$

e anche ponendo

$$(3)\qquad \mathrm{H}ev_1 = m_1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + m_1\,x}{x - m_1\,y}.$$

questa si integra facilmente ponendo

$$z = \frac{y}{x}$$

e si ottiene, detta C una costante,

$$\operatorname{tang}\left[\frac{1}{2} m_1 \log (x^2 + y^2) + C\right] = \frac{y}{x},$$

e in coordinate polari

$$\vartheta = m_1 \log r + C.$$

La costante C si determina ponendo $r = r_1$, per $\vartheta = 0$; si ha con ciò

$$r = r_1 e^{\frac{\vartheta}{m_1}} \tag{4}$$

e analogamente per gli ioni negativi, ponendo

$$He v_2 = m_2$$

si avrebbe

$$r = r_1 e^{-\frac{\vartheta}{m_2}}.$$

Adunque le traiettorie dei due ioni sono due spirali logaritmiche distinte, anzichè un raggio comune del cerchio, come avviene in assenza del campo. Con una corrente centrifuga la spirale degli ioni positivi è percorsa in senso opposto alla corrente magnetizzante. Se si ammette, con Drude, pel bismuto $ev_2 = 5 \times 10^{-5}$, e $ev_1 = 0{,}085 \times 10^{-5}$, per un disco nel quale $\log \frac{r_2}{r_1} = 3$, disposto in un campo di 3000 unità, l'intera spirale risulterebbe compresa in un angolo di circa 18° per gli ioni negativi e di soli 35′ pei positivi; cosicchè, per questi ultimi, potrebbe considerarsi, praticamente, come rettilinea.

In generale si può dire perciò che mentre restano inalterate le linee equipotenziali nel disco, si separano le traiettorie delle due correnti, contrariamente a ciò che ha luogo nell'esperienza di Hall, quando dalla lamina non vengano derivate correnti laterali.

E non occorre in conseguenza tener conto, come nella teoria del fenomeno di Hall, della condensazione trasversale degli ioni e della loro conseguente retrodiffusione elettrica e termica.

2. Veniamo al computo teorico dell'azione elettromagnetica dovuta a queste correnti distorte.

Sia (fig. 2) OAB la traiettoria degli ioni positivi, che è percorsa nel senso opposto a quello della corrente magnetizzante quando la corrente nel disco è centrifuga. Mentre, a campo non eccitato, la corrente procede lungo un raggio, e torna, per la piastrina posteriore, lungo il medesimo raggio, i due cammini vengono sostituiti, in presenza del campo, dalla curva OABO, che dà luogo a un flusso attraverso al disco, e quindi attraverso alla bobina che lo circonda.

Per ragioni evidenti di simmetria, nella valutazione del flusso totale attraverso al disco, o anche attraverso alla bobina indotta concentrica, noi possiamo supporre concentrata in questa spira OABA tutta la corrente I_1 trasportata dagli ioni positivi, data da

$$I_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma} I$$

ove I indica la intera corrente radiale.

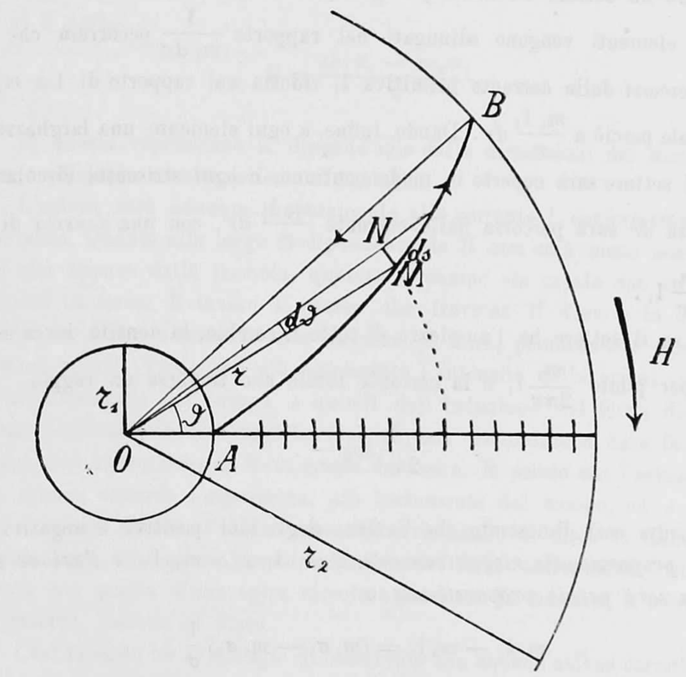

Fig. 2.

Essendo nota la forma della curva, l'azione di questa spira, proporzionale a I_1, può facilmente calcolarsi per quanto riguarda la sua dipendenza da m_1.

È evidente, invero, che i tratti OA, BO non eserciteranno alcuna azione induttiva sulla bobina esterna, dando luogo ad un flusso totale nullo attraverso al disco, poichè le loro direzioni passano pel centro. E così ciascun elemento ds del tratto OAB potrà esser sostituito dalla sua proiezione radiale, inattiva sul flusso totale, e dalla sua proiezione MN sul cerchio di raggio r, eguale a $rd\vartheta$.

Quest' ultima proiezione può essere comunque rotata nel cerchio intorno a O, mantenendogli invariata la distanza r. Possiamo perciò sostituire alla spira un insieme di archetti circolari tutti disposti normalmente a un unico raggio, percorsi dalla corrente I_1 e aventi la lunghezza $r d\vartheta$ o anche, essendo per la (4)

$$r\, d\vartheta = m_1\, dr$$

tutti di lunghezza costante $m_1\, dr$.

Ma se vogliamo che questi elementi sempre lineari, siano invece limitati entro un settore circolare, per esempio d'angolo al centro 1, con che i diversi elementi vengono allungati nel rapporto $\frac{1}{m_1\, dr}$ occorrerà che essi siano percorsi dalla corrente primitiva I_1 ridotta nel rapporto di 1 a $m_1\, dr$, ed eguale perciò a $\frac{m_1\, I_1}{r}\, dr$. Dando, infine, a ogni elemento una larghezza dr, tutto il settore sarà coperto in modo continuo, e ogni striscetta circolare di larghezza dr sarà percorsa dalla corrente $\frac{m_1\, I_1}{r}\, dr$, con una *densità* di corrente $\frac{m_1}{r}\, I_1$.

E se il settore ha l'ampiezza di tutto il cerchio, la densità dovrà essere punto per punto $\frac{m_1}{2\pi r} I_1$ e la corrente totale che traversa un raggio

$$\frac{m_1\, I_1}{2\pi} \log \frac{r_2}{r_1} .$$

Risulta così dimostrato che l'azione degli ioni positivi e negativi del disco è *proporzionale rispettivamente, a* $m_1\, I_1$ *e a* $m_2\, I_2$, *e l'azione complessiva sarà perciò proporzionale a*

$$m_1\, I_1 - m_2\, I_2 = (m_1\, \sigma_1 - m_2\, \sigma_2)\, \frac{I}{\sigma} .$$

La costante di proporzionalità dipenderà solo dalle dimensioni del disco, e anche dalla bobina indotta, se invece del flusso attraverso al primo si ricerca l'azione induttiva sulla seconda; essa sarà perciò comune a tutti i dischi di uguale contorno e di qualsiasi metallo, e potrebbe essere calcolata con considerazioni puramente geometrica. Ma può anche determinarsi sperimentalmente: basta a tal fine misurare l'azione induttiva d'una lamina conduttrice, forata al centro, spaccata lungo un raggio, e nella quale sia applicata, con due conduttori di resistenza trascurabile disposti lungo gli orli del taglio, una forza elettromotrice costante; questa darà luogo appunto a correnti circolari di densità inversamente proporzionale a r. Si misuri, sperimentalmente, con una o più spire che l'abbraccino tutto intorno (o con la bobina indotta che serviva pel disco di bismuto) il flusso totale attraverso la lamina (o la sua azione induttiva sulla bobina) quando la corrente circolare integrale ha il valore $\frac{1}{2\pi} \log \frac{r_2}{r_1}$ e sia K il valore ottenuto, ad esempio, per l'effetto induttivo sulla bobina. È chiaro che l'azione induttiva constatata col disco di bismuto sarà data da

$$C = K(m_1 I_1 - m_2 I_2) = \frac{KeIH}{\sigma}(v_1\sigma_1 - v_2\sigma_2) = KEIH \tag{5}$$

ove si è posto

$$E = \frac{ev_1\sigma_1 - ev_2\sigma_2}{\sigma}. \tag{6}$$

In questa espressione K dipende solo dalle dimensioni del disco, ed E è un coefficiente caratteristico del metallo.

L'azione sarà adunque proporzionale alla corrente I, conformemente alla esperienza. Quanto alla legge di dipendenza da H essa sarà meno semplice di quel che appare dalla formola, qualora il campo sia creato con un elettromagnete in ferro. E invero il flusso che traversa il disco e la bobina si chiude, in parte, attraverso alla carcassa di ferro, penetrando e uscendo per le facce polari. Viene con ciò accresciuta l'intensità delle azioni osservate; ma all'aumentare del campo, e quindi dell'induzione nel ferro, diminuisce la sua permeabilità differenziale, cioè la sua attitudine a dare facile passaggio alle nuove linee di forza create dal disco. È perciò che l'azione induttiva cresce, secondo l'esperienza, più lentamente del campo, ed è per ciò che, a campo eguale, l'azione aumenta avvicinando al disco le facce polari. Si può, però, correggere questa influenza del ferro confrontando l'azione osservata con quella d'una spira circolare percorsa da corrente, e situata nell'intraferro, intorno al disco.

Così facendo ho avuto agio di ossservare che anche l'azione corretta cresce più lentamente del campo, così come avviene dello stesso bismuto pel fenomeno di Hall. Ciò è dimostrato dalla seguente tabella; in cui la seconda colonna contiene le correnti che era necessario mandar nella spira per ottenere la stessa deviazione galvanometrica osservata col disco percorso da 15 ampere:

Campo H =	Corrente equivalente nella spira, i =	$i/H \cdot 10^5$
3700	0,26 A	7
5700	0,31 »	5,6
7000	0,34 »	4,9
8200	0,35 »	4,3
9000	0,37 »	4

3. L'effetto osservato dipende adunque, secondo la teoria, da N_1, N_2 v_1 e v_2; mentre l'effetto Hall dipende inoltre da

$$x_1 = \frac{d \log N_1}{dT}\;, \quad x_2 = \frac{d \log N_2}{dT}\;;$$

cioè dalle variazioni relative dei numeri di ioni con la temperatura, secondo la formula

$$R = \frac{e}{\sigma} \frac{v_1 x_2 - v_2 x_1}{x_1 + x_2}\;.$$

Si riconosce da ciò che l'azione elettromagnetica constatata fornisce un'altra relazione *indipendente* tra le costanti caratteristiche del metallo. E così anche il segno dei due effetti potrebbe essere opposte se fosse, per qualche metallo,

$$v_1 x_2 < v_2 x_1$$

e insieme

$$\sqrt{N_1}\, v_1 > \sqrt{N_2}\, v_2$$

il che non può escludersi *a priori*.

I coefficienti dei quattro effetti trasversali già noti, designati da Drude con le lettere R, P, Q, S, contengono, eccettuato S, le costanti x_1 e x_2. Solo il coefficiente S dell'effetto trasversale termico per una corrente calorifica è dato da

$$S = \frac{e}{\sigma}(v_1 \sigma_2 - v_2 \sigma_1)$$

ed è perciò determinato, come il coefficiente dell'effetto elettromagnetico E, [vedi la (6)] dalle stesse quattro costanti v_1, v_2, σ_1, σ_2. Com'è noto le maggiori incertezze si hanno appunto sul valore e perfino sul segno di S, e da questo, secondo Zahn, deriva l'impossibilità di calcolare le costanti del metallo utilizzando i valori di P, Q, R, S. È probabile che le condizioni diventino migliori sostituendo all'equazione in S l'altra in E, utilizzando cioè l'effetto elettromagnetico.

Allo scopo di formarci un'idea dell'*ordine di grandezza relativo*, pei diversi metalli, dell'effetto Hall e dell'effetto elettromagnetico, ammettiamo che sia per essi, all'incirca,

$$N_1 = N_2 = N$$

e

$$x_1 = x_2$$

si avrà, ritenendo solo i fattori variabili da metallo a metallo, per l'effetto elettromagnetico:

$$E = \frac{N}{\sigma}(v_1^2 - v_2^2) = v_1 - v_2$$

e per l'effetto Hall:

$$R = \frac{v_1 - v_2}{\sigma}$$

e perciò

$$E = R\sigma .$$

Or, com'è noto, mentre R varia moltissimo da metallo a metallo, il prodotto di R per la conducibilità σ varia molto meno [1]. Così mentre il tellurio dà luogo a un effetto Hall 650.000 volte superiore a quello dell'argento, l'effetto elettromagnetico sarà solo 5 volte maggiore. E per la stessa ragione tra bismuto e argento il rapporto dei due coefficienti Hall è circa 11 mila, mentre quello tra le azioni elettromagnetiche sarebbe solo 150. Tutto ciò, beninteso, con le necessarie riserve per la supposta eguaglianza di N_1 e N_2, x_1 e x_2.

Malgrado questa intensificazione dell'effetto elettromagnetico, nei metalli che presentano un effetto Hall troppo debole rispetto al bismuto, pure difficilmente si riesce a manifestare il primo nei metalli comuni, poichè già col bismuto le deviazioni ottenute non sono molto grandi. Con un disco di 60 millimetri di diametro, percorso radialmente da 20 ampére, e una bobina indotta di circa 500 spire, le deviazioni, misurate a un buon galvanometro Siemens a telaio mobile, sono dell'ordine di circa 100 divisioni della scala disposta a 3000 divisioni dallo specchietto, nè si può sperare molto di più, senza complicare troppo la disposizione sperimentale. È perciò che nelle ricerche in corso, per la determinazione assoluta del valore di E, mi son proposto di limitarmi ai tre metalli per cui il prodotto $R\sigma$ ha il maggior valore: il bismuto, l'antimonio e il tellurio.

[1] Drude, l. c. pag. 392.