ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVIII.

1911

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1911

RENDICONTI
DELLE SEDUTE
DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI
Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 2 aprile 1911.

Presidenza del Socio anziano G. Strüver.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sopra alcune omografie dello spazio funzionale.* Nota del Socio S. Pincherle.

1. Sia una successione di funzioni reali continue di una variabile reale x, date nell'intervallo ab $(a \leq x \leq b)$:

$$(\alpha) \qquad \alpha_1(x)\,,\ \alpha_2(x)\,, \ldots\ \alpha_n(x)\,, \ldots$$

Indico con S_α l'insieme delle funzioni rappresentate da serie della forma:

$$(1) \qquad k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n + \cdots,$$

dove le $k_1, k_2, \ldots$ sono costanti reali, prese in modo:

a) che Σk_n^2 sia convergente;

b) che la serie (1) converga uniformemente nell'intervallo ab.

Dirò (k) l'insieme delle successioni di numeri che verificano le condizioni precedenti *a*) e *b*). L'insieme S_α è evidentemente uno spazio lineare, poichè vi appartengono tutte le combinazioni lineari di un numero finito di elementi di quello spazio; come pure è lineare l'insieme (k).

2. Sia una seconda successione di funzioni reali continue della variabile reale y, date nell'intervallo $a \leq y \leq b$:

$$(\beta) \qquad \beta_1(y)\,,\ \beta_2(y)\,, \ldots\ \beta_n(y)\,, \ldots;$$

per queste si definisca nello stesso modo lo spazio lineare S_β delle serie

$$(2) \qquad h_1\beta_1 + h_2\beta_2 + \cdots + h_n\beta_n + \cdots$$

soggette alle medesime condizioni, e sia (h) l'insieme delle relative successioni di coefficienti $h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots$

Il sistema (β) si dirà *associato* ad (α) quando siano verificate le condizioni:

$$\int_a^b \alpha_m(x)\,\beta_n(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{per } m \neq n \\ 1 & \text{»} \;\; m = n, \end{cases} \tag{3}$$
$$(m, n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Le successioni associate, di cui i sistemi ortogonali normali costituiscono un caso particolare tanto importante e in questi ultimi tempi tanto frequentemente considerato, presentano interessanti applicazioni nelle questioni di calcolo funzionale, in ispecie nello studio delle operazioni integrali. Proponendomi di discorrerne più diffusamente in altro lavoro, mi limito qui a farne uso in un caso speciale che dà esempio assai perspicuo delle due specie di degenerescenza che possono presentare le operazioni lineari od omografie in uno spazio ad un numero infinito di dimensioni.

3. Consideriamo la funzione di due variabili:

$$K(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x)\,(c'_n\,\beta_n(y) + c_n\,\beta_{n+1}(y)). \tag{4}$$

Qui le variabili reali x, y variano nell'intervallo J $(a \leq x \leq b,\; a \leq y \leq b)$; le costanti c_n, che si supporrano diverse da zero, e le c'_n sono prese in modo da verificare le tre seguenti condizioni:

a) esse rendano la serie del secondo membro di (4) convergente uniformemente rispetto ad x ed y in tutto l'intervallo J;

b) se $k_1, k_2, \ldots$ appartiene a (k), vi appartengano anche $c_1 k_1, c_2 k_2, \ldots$, e $c'_1 k_1, c'_2 k_2, \ldots$;

c) la successione $\dfrac{c'_1\, c'_2 \ldots c'_n}{c_1\, c_2 \ldots c_n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ appartenga a (k).

Mediante la funzione (4), assunta come nucleo, si possono definire le due operazioni integrali associate:

$$A(\varphi) = \int_a^b K(x, y)\,\varphi(y)\,dy \quad , \quad \bar{A}(\varphi) = \int_a^b K(x, y)\,\varphi(x)\,dx \tag{5}$$

per ogni funzione integrabile $\varphi(x)$ data nell'intervallo ab; in particolare, per ogni elemento di S_α o di S_β.

4. Applicando le A agli elementi di (α), si ottiene:

$$A(\alpha_n) = c'_n\,\alpha_n + c_{n-1}\,\alpha_{n-1}; \tag{6}$$

applicando la $\overline{\mathrm{A}}$ agli elementi di (β), si ottiene:

(7) $$\overline{\mathrm{A}}(\beta_n) = c'_n \beta_n + c_n \beta_{n+1}\,.$$

Le (6) e (7) sono le equazioni di definizione di due omografie, rispettivamente nello spazio S_α e nello spazio S_β.

Se si applica la A ad un elemento

$$\varphi = \sum_{(n)} k_n\, \alpha_n$$

di S_α, si ottiene:

(8) $$\mathrm{A}(\varphi) = \sum_{(n)} (c'_n k_n + c_n k_{n+1})\, \alpha_n\,;$$

se si applica la $\overline{\mathrm{A}}$ ad un elemento

$$\psi = \sum_{(n)} h_n\, \beta_n$$

di S_β, si ottiene:

(9) $$\overline{\mathrm{A}}(\psi) = \sum_{(n)} (c'_n h_n + c_{n-1} h_{n-1})\, \beta_n$$

e per l'ipotesi *b*) del § 3, $\mathrm{A}(\varphi)$ ed $\overline{\mathrm{A}}(\psi)$ appartengono rispettivamente ad S_α ed S_β.

5. L'operazione A ammette radici nello spazio S_α. Infatti, se poniamo

(10) $$c'_n q_n + c_n q_{n+1} = 0 \qquad (n = 1\,,2\,,3\,,\ldots)$$

ne viene da (8) che l'elemento

$$\omega_0 = q_1\alpha_1 + q_2\alpha_2 + \cdots + q_n\alpha_n + \cdots\,,$$

dà

(11) $$\mathrm{A}(\omega_0) = 0\,;$$

e poichè si ha dalle (10):

(12) $$q_n = (-1)^{n-1} q_1 \frac{c'_1\, c'_2 \ldots c'_{n-1}}{c_1\, c_2 \ldots c_{n-1}}\,,$$

ne segue per l'ipotesi *c*) del § 3, che questa radice ω_0 appartiene effettivamente ad S_α.

Nel caso in cui il sistema (α) sia tale che un elemento (1) di S_α non possa essere nullo se non ne sono nulli tutti i coefficienti k_n, la radice ω_0 è unica per A in S_α, all'infuori del moltiplicatore costante q_1.

6. Risolvendo il sistema

(13) $$c'_n k_n + c_n k_{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{per } n \neq m \\ 1 & \text{» } n = m\,, \end{cases}$$

si ottiene la soluzione particolare

$$k_1 = 0\ ,\ \dots\ k_m = 0\ ,\ k_{m+1} = \frac{1}{c_m}\ ,$$

$$k_{m+2} = -\frac{c'_{m+1}}{c_m\,c_{m+1}}\ ,\ \dots\ k_{m+n} = (-1)\,\frac{c'_{m+1}\dots c'_{m+n-1}}{c_m\,c_{m+1}\dots c_{m+n-1}}\ ,$$

e da queste e dalle (10)-(12) la soluzione generale

$$k'_n = k_n + q_n\,.$$

L'elemento

$$\omega_m = \frac{1}{c_m}\,\alpha_{m+1} - \frac{c'_{m+1}}{c_m\,c_{m+1}}\,\alpha_{m+2} + \cdots \tag{14}$$

soddisfa all'equazione in φ

$$\mathrm{A}(\varphi) = \alpha_m\,, \tag{15}$$

cui soddisfa pure $\omega_m + c\omega_0$ (c costante arbitraria), e questa ultima è la soluzione più generale di (15) nell'ipotesi fatta alla fine del § precedente. L'elemento ω_m appartiene ad S_α, come risulta subito dalle ipotesi del § 3.

7. Dai due §§ precedenti risulta che l'omografia A presenta quella degenerescenza che ho chiamata di prima classe [1]: essa ammette cioè radice in S_α, ma è invertibile in S_α nel senso che qualunque elemento della base (α) di questo spazio si può generare applicando l'operazione A ad un elemento dello spazio medesimo.

8. Consideriamo ora l'effetto della $\overline{\mathrm{A}}$ applicata ad un elemento ψ di S_β. Si ha, se è $\psi = \Sigma h_n\,\beta_n$, dalla (9):

$$\overline{\mathrm{A}}(\psi) = \sum_{(n)} g_n\,\beta_n \quad,\quad g_n = c'_n\,h_n + c_{n-1}\,h_{n-1}\,.$$

Ora, poichè la g_n appartiene ad (h), e quindi Σg_n^2 è convergente, ed è anche convergente Σq_n^2, dove q_n è data dalla (12), ne segue, come è ben noto, la convergenza di $\Sigma q_n\,g_n$. Ma si ha immediatamente

$$q_1\,g_1 + q_2\,g_2 + \cdots + q_n\,g_n = (-1)^n\,\frac{c'_1\,c'_2\dots c'_{n-1}\,c'_n}{c_1\,c_2\dots c_{n-1}}\ ;$$

onde

$$\sum_{(n)} q_n\,g_n = \lim_{n=\infty}\,(-1)^n\,\frac{c'_1\,c'_2\dots c'_n}{c_1\,c_2\dots c_{n-1}}\,g_n\,.$$

[1] Rendic. dell'Istituto Lombardo, 15 luglio 1897; Pincherle e Amaldi, *Le operazioni distributive*, pag. 444 (Bologna, Zanichelli, 1901); Hadamard, *La série de Taylor*, pag. 80 (Paris, Naud, 1901).

Ma per l'ipotesi *c*) del § 3, è

$$\lim_{n=\infty} g_n \frac{c'_1 c'_2 \dots c'_{n-1}}{c_1 c_2 \dots c_{n-1}} = 0:$$

e quindi, per l'ipotesi *b*) del medesimo §, è anche

$$\lim_{n=\infty} g_n \frac{c'_1 c'_2 \dots c'_n}{c_1 c_2 \dots c_{n-1}} = 0.$$

Dunque si ha

$$\sum_{(n)} q_n g_n = 0. \tag{16}$$

Talchè l'operazione $\overline{\mathrm{A}}$, applicata allo spazio S_β, non riproduce elementi arbitrarî di questo spazio, ma solo elementi tali che i loro coefficienti $g_1, g_2, \dots$ soddisfino alla relazione (16). Secondo una nomenclatura geometrica che ho usata in varie circostanze, gli elementi $\overline{\mathrm{A}}(\psi)$ appartengono ad un determinato *piano funzionale*. Per il suo carattere, la proprietà degli elementi $\overline{\mathrm{A}}(\psi)$ è logicamente analoga alla divisibilità [1].

D'altra parte, la $\overline{\mathrm{A}}$ non ammette necessariamente radici in S_β. Così, se il sistema (β) è tale che un elemento (2) di S_β non possa essere nullo se non sono nulli tutti i coefficienti h_n, l'operazione $\overline{\mathrm{A}}$ è priva di radici non identicamente nulle, poichè l'equazione

$$\overline{\mathrm{A}}(\psi) = 0$$

porta al sistema

$$c'_n h_n + c_{n-1} h_{n-1} = 0, \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

che dà tutte le h_n uguali a zero.

9. Risulta dal § precedente che l'omografia $\overline{\mathrm{A}}$ dà esempio di quella degenerescenza che ho detta di seconda classe: non ammette radici in S_β, ma applicata ad S_β non riproduce tutto lo spazio S_β, bensì solo una parte di esso.

10. Nel caso che uno dei coefficienti c'_n sia nullo, per esempio $c'_1 = 0$, i due fatti ora notati si presentano nel modo più semplice. Infatti α_1 è radice per l'operazione A, mentre l'operazione $\overline{\mathrm{A}}$ è tale da produrre quei soli elementi di S_β in cui manca il termine in β_1.

11. Per brevità di discorso si è ammessa la continuità della (α) e delle (β) e la convergenza uniforme delle serie di S_α ed S_β. Non vi è difficoltà a porre condizioni meno restrittive; basta la semplice integrabilità, nel senso di Lebesgue, per le funzioni, e la integrabilità termine a termine per le serie; si lasciano al lettore le facili modificazioni.

[1] V. la mia Nota nei Rendiconti dell'Accad. di Bologna, 8 maggio 1910.

12. In un recente lavoro [1], sintesi accurata e ricca di interessanti considerazioni sulla teoria delle matrici infinite secondo le idee di Hilbert, i signori Hellinger e Toeplitz dànno alcune proposizioni di carattere formale [2] relative alle equazioni simboliche

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{J} \quad , \quad \mathfrak{Y}\mathfrak{A} = \mathfrak{J} ,$$

dove $\mathfrak{A}$ è una matrice data, $\mathfrak{J}$ è la matrice unità, $\mathfrak{B}$ ed $\mathfrak{Y}$ sono matrici da determinarsi; tutte da supporsi limitate (*beschränkt*) nel senso di Hilbert. Quando esistono tali matrici $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{Y}$, la prima si dice reciproca a destra, la seconda reciproca a sinistra di $\mathfrak{A}$. Gli autori citati osservano che mentre per le matrici finite sono possibili solo i due casi seguenti:

1) esiste un'unica reciproca a destra e un'unica reciproca a sinistra, fra loro coincidenti;

2) non esiste reciproca nè a destra, nè a sinistra;

invece per le matrici finite limitate sono possibili anche gli altri due casi:

3) la reciproca a destra è indeterminata, la reciproca a sinistra non esiste;

4) la reciproca a sinistra è indeterminata, la reciproca a destra non esiste.

Ora, i due casi 3) e 4), particolari alle matrici infinite, corrispondono precisamente alla degenerescenza di prima e di seconda classe che ho notate nelle omografie di uno spazio ad infinite dimensioni. A persuadersene, basta osservare che in uno spazio S_∞ la cui base sia la successione $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n, \dots$, un'omografia A è definita da

$$A(\alpha_n) = a_{1n}\alpha_1 + a_{2n}\alpha_2 + \cdots + a_{\nu n}\alpha_n + \cdots ;$$

le si può fare corrispondere la matrice

$$\left\{ \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix} \right.$$

e alla somma ed al prodotto di due operazioni corrispondono, come si verifica subito, la somma ed il prodotto delle matrici corrispondenti.

Se allora siamo nel caso 3) di Hellinger e Toeplitz, abbiamo, indicando con 1 l'operazione identica, almeno due distinte operazioni X, X' tali che

$$AX = 1 \quad , \quad AX' = 1$$

onde

$$A(X - X') = 0 ;$$

[1] *Grundlagen für eine Theorie der unendlichen Matrizen* (Math. Ann., Bd. 69, pag. 289, 1910).

[2] Loc. cit., pp. 311-312.

l'operazione A ammette dunque radici, pure essendo qualunque elemento dello spazio raggiungibile coll'operazione A: A è dunque degenere di prima classe. Mentre se siamo nel caso 4), abbiamo per due operazioni distinte Y, Y':

$$YA = 1 \quad , \quad Y'A = 1 ,$$

onde

$$(Y - Y')\,A = 0 ;$$

l'operazione Y — Y', non nulla in S_α per ipotesi, dà dunque per risultato lo zero se applicata a qualunque elemento $A(\alpha)$; $A(\alpha)$ non può essere dunque che una parte di S_α, pur non avendosi radici. $\bar{A}$ è quindi degenere di seconda classe.

Per le operazioni A ed $\bar{A}$ studiate nella presente Nota, troviamo come matrice corrispondente ad A la seguente:

$$\left\{\begin{matrix} c'_1 & c_1 & 0 & 0 \ldots \\ 0 & c'_2 & c_2 & 0 \ldots \\ 0 & 0 & c'_3 & c_3 \ldots \\ . & . & . & . \; . \; . \; . \end{matrix}\right.$$

Se si vuole la matrice reciproca a destra, si ha da risolvere il sistema (13), che ne pone in luce l'indeterminazione; mentre se si cerca la reciproca a sinistra, si ha da risolvere il sistema

$$c'_n\,k_n + c_{n-1}\,k_{n-1} = \begin{cases} 0 & \text{per } n \neq m \\ 1 & \;\;\text{»}\;\; n = m \end{cases}$$

il quale dà in generale una successione k_n non appartenente a (k); naturalmente l'inverso accade per $\bar{A}$.

Matematica. — *Sopra le funzioni permutabili di 2ª specie e le equazioni integrali.* Nota del Socio Vito Volterra.

Zoologia. — *Intorno ai Protozoi dei Termitidi.* Nota preliminare del Socio B. Grassi.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.