

ATTI  
DELLA  
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVIII.

1911

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XX.

1° SEMESTRE.



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1911

**Matematica.** — *L'equazione integrale di Volterra della seconda specie con un limite dell'integrale infinito.* Nota del dott. G. C. EVANS, presentata dal Corrisp. G. LAURICELLA.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

**Meccanica.** — *Sulla biforcazione di una vena liquida* (1). Nota II di U. CISOTTI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

6. — AZIONE DELLA VENA SOPRA IL PROFILO RIGIDO.

Designi  $dy$  un elemento di profilo rigido  $\gamma$ ,  $\theta$  l'angolo che forma con l'asse  $x$  la normale a  $dy$ , volta verso l'interno del campo A. La risultante delle pressioni subite dagli elementi di contorno avrà per componenti

$$R_x = - \int_{\gamma} p \cos \theta \, dy \quad , \quad R_y = - \int_{\gamma} p \sin \theta \, dy .$$

Queste relazioni si possono compendiare in

$$\mathfrak{R} = R_x + i R_y = - \int_{\gamma} p e^{i\theta} \, dy .$$

Ora il contorno  $\gamma$  confina con A lungo  $\varpi_1 + \varpi_2$  e con B nella parte rimanente. Se si nota [cfr. n. 2] che quivi è  $p = p_0$ , si avrà per la (3),

$$\mathfrak{R} = - p_0 \int_{\gamma} e^{i\theta} \, dy - \frac{1}{2} \int_{\varpi_1 + \varpi_2} (1 - V^2) e^{i\theta} \, d\varpi .$$

Essendo identicamente nullo il primo integrale, si ha in definitiva

$$(22) \quad \mathfrak{R} = - \frac{1}{2} \int_{\varpi_1 + \varpi_2} (1 - V^2) e^{i\theta} \, d\varpi .$$

Questa relazione mostra che  $\mathfrak{R}$  dipende esclusivamente dallo stato di moto in  $\varpi_1$  e  $\varpi_2$  (2).

Considero ora tre sezioni trasversali delle vene: a monte e a valle di  $\gamma$ , a distanze convenientemente grandi da  $\gamma$ , che chiamo rispettivamente  $\sigma, \sigma_1, \sigma_2$ . Per quanto si è visto [n. 2] è a ritenersi che  $h, h_1, h_2$  sieno le rispettive larghezze di queste vene in dette sezioni.

Si tratta di valutare  $\mathfrak{R}$ .

(1) Vedi Nota I, a pag. 314 (seduta del 5 marzo 1911).

(2) Cfr. Levi-Civita, loc. cit., pag. 19.

Giova a tal uopo prendere le mosse da una immediata conseguenza del lemma di Green (<sup>1</sup>). Se  $\varphi(x, y)$  è una funzione uniforme, armonica e regolare in un campo limitato da una linea chiusa  $s$  (o più generalmente da un sistema di tali linee), e si pone

$$V^2 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2,$$

si ha

$$(23) \quad \int_s \frac{d\varphi}{dn} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + i \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) ds = \frac{1}{2} \int_s V^2 e^{i\theta} ds,$$

representando  $n$  la normale in un generico punto a  $s$ , volta verso l'interno del campo, e  $\theta$  l'angolo che  $n$  forma colla direzione positiva dell'asse  $x$ .

Applico la (23) alla parte del campo  $A$  limitata dal contorno costituito da  $\sigma, \lambda', \sigma_1, \lambda_1, \varpi_1, \varpi_2, \lambda_2, \sigma_2, \lambda''$ .

Essendo  $\varphi$  il potenziale di velocità delle molecole liquide in  $A$  [cfr. n. 1] e  $V$  il valore assoluto della loro velocità, si noti che:

$$\frac{d\varphi}{dn} = \begin{cases} 0 & \text{sopra } \lambda', \lambda'', \lambda_1, \lambda_2, \varpi_1, \varpi_2, \\ 1 & \text{" } \sigma, \\ -1 & \text{" } \sigma_1 \text{ e } \sigma_2; \end{cases}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + i \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \begin{cases} 1 & \text{sopra } \sigma, \\ e^{i\varpi_1} & \text{" } \sigma_1, \\ e^{i\varpi_2} & \text{" } \sigma_2; \end{cases}$$

$$\theta = \begin{cases} 0 & \text{sopra } \sigma, \\ \pi + \vartheta_1 & \text{" } \sigma_1, \\ \pi + \vartheta_2 & \text{" } \sigma_2; \end{cases}$$

$V = 1$  sopra tutto il contorno eccettuati  $\varpi_1$  e  $\varpi_2$ . Ciò posto, dalla (23) si ricava

$$h - h_1 e^{i\varpi_1} - h_2 e^{i\varpi_2} = \int_{\varpi_1 + \varpi_2} V^2 e^{i\theta} d\varpi + \int_{\lambda' + \lambda'' + \lambda_1 + \lambda_2} e^{i\theta} d\lambda.$$

La eliminazione dell'  $\int_{\varpi_1 + \varpi_2} V^2 e^{i\theta} d\varpi$  tra la precedente e la (22) permette di esprimere  $\mathfrak{N}$  nel modo seguente:

$$2\mathfrak{N} = h - h_1 e^{i\varpi_1} - h_2 e^{i\varpi_2} - \int_{\lambda' + \lambda'' + \lambda_1 + \lambda_2 + \varpi_1 + \varpi_2} e^{i\theta} ds.$$

(<sup>1</sup>) Cfr. Levi-Civita, *Sulla contrazione delle vene liquide*. Atti del R. Ist. Ven. di Sc. Lett. ed Arti, tomo LXIV (1905), pp. 1466-1467.

Ma poichè è nullo l'  $\int e^{i\theta} ds$  esteso ad un contorno chiuso, l'integrale del secondo membro non è altro che

$$-\int_{\sigma+\sigma_1+\sigma_2} e^{i\theta} ds = -h + h_1 e^{i\alpha_1} + h_2 e^{i\alpha_2}.$$

Con ciò, posto

$$\frac{h_1}{h} = \chi_1, \quad \frac{h_2}{h} = \chi_2,$$

con che  $\chi_1$  e  $\chi_2$  rappresentano i rapporti delle larghezze (e quindi delle portate) di ciascuna delle due vene a valle a quella della vena a monte, si ha in definitiva

$$(24) \quad \mathfrak{N} = h(1 - \chi_1 e^{i\alpha_1} - \chi_2 e^{i\alpha_2}),$$

essendo [cfr. n. 2]  $\chi_1 + \chi_2 = 1$ .

Questa formula esprime in modo compendioso, notevolmente semplice, la risultante delle azioni esercitate dalla vena sopra il profilo rigido, in funzione di elementi direttamente accessibili all'esperienza. Dalla (24) risulta che  $\mathfrak{N}$  non dipende dalla forma del profilo  $\gamma$ , ma soltanto (beninteso oltre che dalla velocità della vena a monte e dalla sua portata) dal dislocamento delle vene a valle <sup>(1)</sup>.

Nel caso della simmetria è  $-\mathcal{J}_2 = \mathcal{J}_1 = \beta$  e  $\chi_1 = \chi_2 = \frac{1}{2}$ , avendo chiamato  $\beta$  il valore assoluto dell'angolo che ciascuna delle direzioni assintotiche delle vene a valle forma con l'asse  $x$ ; la (24) diviene allora

$$(24') \quad \mathfrak{N} = h(1 - \cos \beta) = 2h \sin^2 \frac{\beta}{2},$$

d'onde, in particolare,  $R_y = 0$ , come era evidente *a priori* attesa la simmetria.

#### 7. — CASO PARTICOLARE: VENA SIMMETRICAMENTE BIPARTITA DA UNA LAMINA RETTILINEA. AZIONE UNITARIA.

Riferendomi al n. 5, prendo  $2\alpha = \pi$  e  $\Omega = 0$ .

Se si tiene presente allora che quando c'è simmetria  $\mathcal{J} = 0$ , e  $h_1 = h_2 = \frac{1}{2}h$  [cfr. nn. 1 e 2], dalla (20) e dalle (12), (13), (14) e (17)

<sup>(1)</sup> Cfr. Voigt, *Meccanica elementare* (Versione italiana di A. Sella). Roma, Loescher, 1894, pag. 378. Ivi nelle formule (83'') — valide nel problema a tre dimensioni — è sostanzialmente contenuta la mia formula (24). Cfr. anche Masoni, *Corso di idraulica teoretica e pratica*. Napoli, Pellerano, 1908, terza edizione, pp. 182-189. La (24) rientra anche in una notevole formula generale dedotta in questi giorni dal prof. Boggio e che apparirà in questi Rendiconti.

scendono — notando che  $f_2 = f_1$  — le relazioni seguenti:

$$(25) \quad \sigma_0 = \frac{\pi}{2}, \quad F_0 = 0, \quad \varphi_0 = 0, \quad b = 0, \quad j = i, \quad \zeta' + \zeta'' = 0,$$

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{2} \left( \zeta'' + \frac{1}{\zeta''} \right) = -\frac{1}{2} \left( \zeta' + \frac{1}{\zeta'} \right).$$

La (21), per la (18), dà in tali condizioni

$$(26) \quad \omega(\zeta) = i \log \frac{1 + i\zeta}{1 - i\zeta}.$$

Sulla semicirconferenza  $1, i, -1$  si ha  $\zeta = e^{i\sigma}$ , con  $\sigma$  compreso tra  $0$  e  $\pi$ . Ne viene

$$\log \frac{1 + i\zeta}{1 - i\zeta} = \begin{cases} i \frac{\pi}{2} + \log \frac{\cos \sigma}{1 + \sin \sigma} & \text{per } 0 < \sigma < \frac{\pi}{2}, \\ -i \frac{\pi}{2} + \log \frac{-\cos \sigma}{1 + \sin \sigma} & \text{per } \frac{\pi}{2} < \sigma < \pi. \end{cases}$$

Ricordando la (9)

$$(9) \quad \omega = \vartheta + i\tau,$$

ed il significato di  $\vartheta$  [n. 3] si può dire che *le due segmenti  $\varpi_1$  e  $\varpi_2$  sono per diritto, e si tratta di un profilo rettilineo (lamina) normale all'asse  $x$ .*

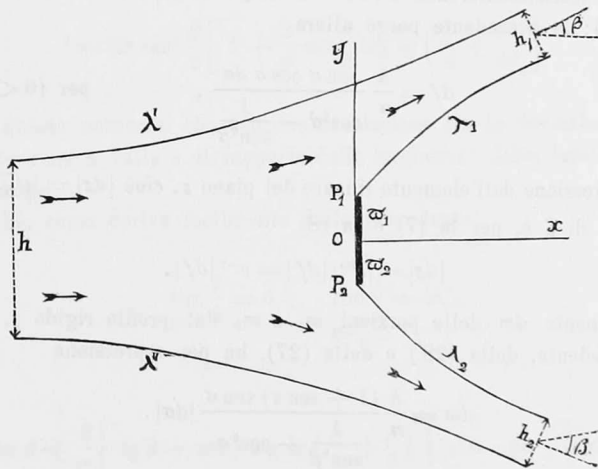


FIG. 4.

Il coefficiente di  $i$  in  $\omega$  ha l'espressione

$$(27) \quad \tau = \log \frac{|\cos \sigma|}{1 + \sin \sigma},$$

valida su tutta la semicirconferenza  $1, i, -1$ .

Poichè, detto  $\beta$  l'angolo che ciascuna delle direzioni assintotiche delle vene a valle forma coll'asse  $x$ , deve essere [cfr. nn. 1 e 4]  $\omega(\zeta') = \beta$  e  $\omega(\zeta'') = -\beta$ , dalla (26) si ricava  $\zeta'' = -\zeta' = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$ .

Per queste, dall'ultima delle (25) si ha  $a = \operatorname{sen} \beta$ .

Dopo ciò e per le (25), l'ultima delle (12), la (15) e la (16) possono scriversi rispettivamente

$$\begin{cases} e^{-f} = (1 - F^2)^{\frac{h}{2\pi}}, \\ F = \operatorname{sen} \beta \cdot Z, \\ Z = -\frac{1}{2} \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right). \end{cases}$$

Da queste differenziando si ottiene

$$(28) \quad df = \frac{h}{\pi} \frac{\zeta^2 - \frac{1}{\zeta^2}}{\frac{4}{\operatorname{sen}^2 \beta} - \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right)^2} \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Sulla semicirconferenza  $1, i, -1$  è  $\zeta = e^{i\sigma}$  (con  $\sigma$  reale e compreso fra 0 e  $\pi$ ); la precedente porge allora

$$(28') \quad df = \frac{h}{\pi} \frac{\operatorname{sen} \sigma \cos \sigma d\sigma}{\cos^2 \sigma - \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \beta}}, \quad \text{per } (0 < \sigma < \pi).$$

L'espressione dell'elemento lineare del piano  $z$ , cioè  $|dz| = \sqrt{dx^2 + dy^2}$  in termini di  $\zeta$  è, per la (7) e la (8)

$$(29) \quad |dz| = |e^{i\omega}| |df| = e^{-\tau} |df|.$$

L'elemento  $d\omega$  delle porzioni  $\omega_1$  e  $\omega_2$  del profilo rigido  $\gamma$ , a norma della precedente, della (28') e della (27), ha per espressione

$$d\omega = \frac{h}{\pi} \frac{(1 + \operatorname{sen} \sigma) \operatorname{sen} \sigma}{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \beta} - \cos^2 \sigma} |d\sigma|.$$

Siccome  $d\sigma$  è positivo o negativo secondochè  $\sigma$  è crescente o decrescente, così

$$(30) \quad \omega = \frac{h}{\pi} \int_{\sigma}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 + \operatorname{sen} \sigma) \operatorname{sen} \sigma d\sigma}{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \beta} - \cos^2 \sigma},$$

rappresenterà tanto per  $\varpi_1$  quanto per  $\varpi_2$  la lunghezza del tratto di lamina compreso tra il punto 0 e un punto generico.

In particolare detta  $l$  la lunghezza della lamina, si avrà dalla (30)

$$l = \frac{2h}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 + \operatorname{sen} \sigma) \operatorname{sen} \sigma \, d\sigma}{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \beta} - \cos^2 \sigma}.$$

E poichè

$$\begin{aligned} \frac{(1 + \operatorname{sen} \sigma) \operatorname{sen} \sigma}{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \beta} - \cos^2 \sigma} &= \frac{\operatorname{sen} \sigma}{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \beta} - \cos^2 \sigma} + \frac{\operatorname{sen}^2 \sigma}{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \beta} - \cos^2 \sigma} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{sen} \beta \frac{d}{d\sigma} \log \frac{\frac{1}{\operatorname{sen} \beta} - \cos \sigma}{\frac{1}{\operatorname{sen} \beta} + \cos \sigma} - \cos \beta \frac{d}{d\sigma} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\operatorname{tg} \sigma}{\cos \beta} + 1, \end{aligned}$$

dalla precedente si ricava, in definitiva

$$(31) \quad l = 2h \operatorname{sen}^2 \frac{\beta}{2} \left[ 1 + \frac{2}{\pi} \cot \frac{\beta}{2} \log \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2} \right) \right].$$

Formola questa notevole, che esprime la relazione tra le deviazioni assintotiche delle vene a valle e il rapporto delle larghezze: della lamina e della vena a monte.

Poichè, come deriva facilmente dalla precedente,

$$\lim_{\beta=0} \frac{l}{h} = 0 \quad , \quad \lim_{\beta=\frac{\pi}{2}} \frac{l}{h} = \infty,$$

e inoltre

$$\frac{d}{d\beta} \frac{l}{h} = \operatorname{sen} \beta + \frac{2}{\pi} \left[ \operatorname{tg} \beta + \cos \beta \log \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2} \right) \right] > 0 \quad \text{per} \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{2},$$

si può dire che il rapporto  $\frac{l}{h}$  è continuamente crescente da 0 a  $\infty$  quando  $\beta$  varia da 0 a  $\frac{\pi}{2}$ . Pertanto la deviazione assintotica delle vene a valle cresce o diminuisce assieme al rapporto  $\frac{l}{h}$ .

La (24) fornisce l'espressione dell'azione totale esercitata dalla vena sulla lamina; dividendola per  $l$  si ottiene l'azione unitaria

$$(32) \quad \frac{\mathfrak{A}}{l} = \frac{\pi}{\pi + 2 \cot \frac{\beta}{2} \log \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2} \right)}$$

Poichè

$$\lim_{\beta=0} \cot \frac{\beta}{2} \log \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2} \right) = 2,$$

— ricordiamo che in tal caso il rapporto  $\frac{h}{l}$  cresce indefinitamente — dalla precedente si ricava allora

$$\frac{\mathfrak{A}}{l} = \frac{\pi}{\pi + 4},$$

che è il risultato dovuto ad Helmholtz, riguardo all'azione unitaria esercitata sulla lamina quando la corrente liquida è indefinitamente larga (<sup>1</sup>).

Come si accerta senza difficoltà, il denominatore del secondo membro della (32) cresce continuamente da  $\pi + 4$  fino a  $\infty$  quando  $\beta$  varia da 0 fino a  $\frac{\pi}{2}$ , si può quindi concludere che *la azione unitaria della vena sulla lamina cresce o diminuisce assieme al rapporto  $\frac{h}{l}$ , assumendo il massimo valore  $\frac{\pi}{\pi + 4}$  quando detto rapporto è infinitamente grande, ed il minimo valore 0 quando  $\frac{h}{l} = 0$ .*

Fanno seguito due tabelle. La tabella 1 contiene diversi valori del rapporto  $\frac{l}{h}$  ricavati, mediante la formola (31), attribuendo a  $\beta$  altrettanti valori compresi tra 0° e 90°.

Risulta da essa che la deviazione delle vene a valle si rende sensibile anche per  $\frac{l}{h}$  abbastanza piccolo, e raggiunge valori vicinissimi al massimo ( $\beta = 90^\circ$ ) quando  $\frac{l}{h} = 10$  circa.

La tabella 2 reca diversi valori dell'azione unitaria  $\frac{\mathfrak{A}}{l}$  della vena sulla lamina, corrispondenti ad altrettanti valori del rapporto  $\frac{l}{h}$ . Quelli della colonna intermedia corrispondono al caso — finora trattato — della vena

(<sup>1</sup>) Cfr. ad es. Lamb, *Lehrbuch der Hydrodynamik* (trad. tedesca). Leipzig und Berlin, Teubner, 1907, pag. 117.



libera, e sono stati valutati in base alla formula (32); quelli dell'ultima colonna (a destra) si riferiscono invece al caso in cui la lamina viene investita dalla corrente di un canale rettilineo, entro cui trovasi, e sono stati ricavati da formule che ho stabilite nella Memoria: *Sul moto di un solido in un canale* (1).

TABELLA 1

Valori di $\beta$	Valori di $\frac{l}{h}$
0°	0
10°	0,02
20°	0,13
30°	0,27
40°	0,53
50°	0,83
60°	1,22
70°	1,67
80°	2,34
82°	2,52
84°	2,75
86°	3,05
88°	3,51
89°	3,96
89°30'	4,42
89°59'	6,62
89°59'30"	7,21
89°59'50"	9,23
89°59'58"	9,94

TABELLA 2

Valori di $\frac{l}{h}$	Valori di $\frac{\mathfrak{N}}{l}$ nella vena libera	Valori di $\frac{\mathfrak{N}}{l}$ nel canale
0,0	0,43	0,43
0,1	0,43	0,44
0,2	0,43	0,44
0,3	0,43	0,45
0,4	0,43	0,45
0,5	0,42	0,46
0,6	0,42	0,46
0,7	0,42	0,47
0,8	0,42	0,48
0,9	0,41	0,49
1	0,41	—
2	0,36	—
3	0,30	—
4	0,24	—
5	0,19	—
6	0,16	—
7	0,14	—
8	0,12	—
9	0,11	—
10	0,10	—

M'è sembrato utile porre in condizioni di confronto i risultati corrispondenti ai due casi. Si accerta così che mentre *nella vena libera* l'azione unitaria  $\frac{\mathfrak{N}}{l}$  decresce assai lentamente (da 0,43 fino a 0,41) quando  $\frac{l}{h}$  varia da 0 a 1, invece *nel canale* essa aumenta più sensibilmente (da 0,43 fino

(1) Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, vol. XXVIII, pp. 307-352. Dalla formula (62') e dalla (67) della citata Memoria, posto  $\frac{\pi}{2\Omega} = \lambda$  si ottengono le formule

$$\frac{l}{h} = [1 - \lambda] \left[ 1 - \frac{2}{\pi} (1 + \lambda) \operatorname{arc} \operatorname{tg} \lambda \right], \quad \frac{\mathfrak{N}}{l} = \frac{1}{2} \frac{1 - \lambda}{1 - \frac{2}{\pi} (1 + \lambda) \operatorname{arc} \operatorname{tg} \lambda}$$

(per  $0 < \lambda \leq 1$ ),

di cui mi sono valso per determinare, nella tabella 2, valori di  $\frac{\mathfrak{N}}{l}$  nel canale.

a 0,49 quando  $\frac{l}{h}$  raggiunge 0,9). Nel canale non sono ovviamente possibili valori di  $\frac{l}{h} \geq 1$ , ma tale limitazione non vige naturalmente per la vena libera; pertanto un ulteriore confronto nei due casi non è più possibile. Riferendoci allora alla vena libera è interessante rilevare che per  $\frac{l}{h} \geq 1$  i valori di  $\frac{\partial \mathfrak{N}}{l}$  decrescono con maggiore rapidità: così, in particolare, per  $\frac{l}{h} = 10$  si ha di già  $\frac{\partial \mathfrak{N}}{l} = 0,10$ .

*Matematica.* — *Sulle superficie e varietà algebriche di genere geometrico nullo.* Nota del Corrispondente FRANCESCO SEVERI.

*Meccanica.* — *Calcolo delle azioni dinamiche esercitate da correnti fluide sopra pareti rigide.* Nota I di TOMMASO BOGGIO, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

*Matematica.* — *Sopra un nuovo operatore differenziale per le omografie vettoriali.* Nota di G. BURALI-FORTI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

*Matematica.* — *Sulle funzioni permutabili di seconda specie.* Nota di LUIGI SINIGALLIA, presentata dal Corrisp. G. LAURICELLA.

*Geodesia.* — *Sulle rappresentazioni isodromiche.* Nota di CORRADINO MINEO, presentata dal Corrisp. A. VENTURI.

*Fisica.* — *Rotazione del campo magnetico di un disco di bismuto percorso radialmente da un flusso di calore.* Nota di O. M. CORBINO, presentata dal Socio P. BLASERNA.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.