ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVIII.

1911

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1911

RENDICONTI
DELLE SEDUTE
DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI
Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 23 aprile 1911.
F. D'Ovidio Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sopra le funzioni permutabili di 2ª specie e le equazioni integrali.* Nota del Socio Vito Volterra.

1. Consideriamo le funzioni finite e continue

$$f_1(x), f_2(x), \ldots f_n(x) \; ; \; \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots \varphi_n(x),$$

quindi poniamo

$$\int_0^1 \varphi_s(x)\, f_i(x)\, dx = \lambda_{si},$$

e supponiamo che il determinante delle λ_{si} sia diverso da zero.

Formiamo adesso le funzioni

$$\text{(I)} \qquad F(x, y) = \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_s a_{is}\, f_i(x)\, \varphi_s(y)$$

$$\text{(II)} \qquad \Phi(x, y) = \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_s b_{is}\, f_i(x)\, \varphi_s(y).$$

Se operiamo sopra F e Φ una composizione di seconda specie [1] otterremo la funzione

$$\ddot{F}\ddot{\Phi}(x, y) = \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_s c_{is}\, f_i(x)\, \varphi_s(y),$$

[1] *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali.* Rend. Ac. dei Lincei, Seduta 20 febbraio 1910, § 8.

essendo

$$c_{is} = \sum_h \sum_k a_{ih}\, \lambda_{hk}\, \lambda_{ks}\,.$$

Per rappresentare questo scriviamo le sostituzioni

(1) $$A = \begin{Vmatrix} a_{11}, a_{12}, \dots a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \dots a_{2n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1}, a_{n2}, \dots a_{nn} \end{Vmatrix}, \qquad (2) \qquad B = \begin{Vmatrix} b_{11}, b_{12}, \dots b_{1n} \\ b_{21}, b_{22}, \dots b_{2n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ b_{n1}, b_{n2}, \dots b_{nn} \end{Vmatrix}$$

(3) $$\varLambda = \begin{Vmatrix} \lambda_{11}, \lambda_{12}, \dots \lambda_{1n} \\ \lambda_{21}, \lambda_{22}, \dots \lambda_{2n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \lambda_{n1}, \lambda_{n2}, \dots \lambda_{nn} \end{Vmatrix}, \qquad (4) \qquad C = \begin{Vmatrix} c_{11}, c_{12}, \dots c_{1n} \\ c_{21}, c_{22}, \dots c_{2n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ c_{n1}, c_{n2}, \dots c_{nn} \end{Vmatrix}$$

ed avremo

$$C = A \varLambda B\,,$$

ove il secondo membro denota il prodotto delle tre sostituzioni $A \varLambda B$.

Ne segue che la condizione necessaria e sufficiente per la permutabilità di seconda specie delle funzioni (I) e (II) è espressa da

(5) $$A \varLambda B = B \varLambda A\,.$$

2. Ciò premesso osserviamo che la relazione precedente è equivalente all'altra

(5') $$(\varLambda A)(\varLambda B) = (\varLambda B)(\varLambda A)\,,$$

dunque, *condizione necessaria e sufficiente per la permutabilità di seconda specie di* F *e* Φ *è che le sostituzioni* $\varLambda A$ *e* $\varLambda B$ *siano fra loro permutabili.*

Nella ipotesi in cui B si riduca all'identità, cioè

$$B = \begin{Vmatrix} 1, 0, \dots 0 \\ 0, 1, \dots 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 0, 0, \dots 1 \end{Vmatrix} = 1$$

e quindi

(6) $$\Phi(x, y) = \sum_1^n {}_i\, f_i(x)\, \varphi_i(y)$$

la condizione precedente si riduce a

$$A \varLambda = \varLambda A\,,$$

ossia che *le sostituzioni* $\varLambda$ *e* A *siano fra loro permutabili*, mentre se $\varLambda = 1$ essa diviene

$$AB = BA\,,$$

ossia che *siano permutabili le sostituzioni* B *ed* A.

3. Ho studiato la questione delle permutabilità delle sostituzioni nei Preliminari della seconda parte della mia Memoria: *Sui fondamenti della teoria delle equazioni differenziali lineari* (¹).

Rimando quindi alla suddetta Memoria per la trattazione del problema di trovare tutte le sostituzioni permutabili con una data sostituzione. Perciò *nota la funzione* (II) *potremo avere tutte le funzioni della forma* (I) *permutabili di 2ª specie con essa.*

4. Nella Memoria adesso citata (²) ho dimostrato il teorema seguente: *La condizione necessaria e sufficiente affinchè le sostituzioni permutabili con una data sostituzione siano permutabili fra loro è che i divisori elementari della sostituzione data siano potenze di basi tutte differenti fra loro.* Quando questa condizione è verificata ho chiamato la sostituzione *elementare.*

Ne segue che *la condizione necessaria e sufficiente affinchè tutte le funzioni* (I) *permutabili colla* (II) *siano permutabili fra loro è che il prodotto delle sostituzioni* $\varDelta$B *sia elementare.*

5. Vogliamo dare subito una applicazione dei precedenti resultati ad una questione di equazioni integrali.

Supponiamo $\varDelta$B *elementare* e siano $\mathrm{F}_0, \mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \ldots \mathrm{F}_m$, $m+1$ funzioni della forma (I) permutabili di 2ª specie con (II): esse saranno permutabili fra loro.

Proponiamoci il problema di *trovare una funzione* F, *avente la forma* (I) *e permutabile con* (II), *la quale verifichi l'equazione integrale di grado m*

$$\text{(III)} \qquad \ddot{\mathrm{F}}_0 \ddot{\mathrm{F}}^m + \ddot{\mathrm{F}}_1 \ddot{\mathrm{F}}^{m-1} + \ddot{\mathrm{F}}_2 \ddot{\mathrm{F}}^{m-2} + \cdots + \ddot{\mathrm{F}}_{m-1} \ddot{\mathrm{F}} + \mathrm{F}_m = 0 .$$

Posto

$$\mathrm{F}_h = \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_s \, a_{is}^{(h)} f_i(x)\, \varphi_s(y),$$

$$\mathrm{A}_h = \begin{Bmatrix} a_{11}^{(h)}, a_{12}^{(h)}, \ldots a_{1n}^{(h)} \\ a_{21}^{(h)}, a_{22}^{(h)}, \ldots a_{2n}^{(h)} \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{n1}^{(h)}, a_{n2}^{(h)}, \ldots a_{nn}^{(h)} \end{Bmatrix},$$

dovremo avere

$$\text{(III}_a\text{)} \qquad (\varDelta\mathrm{A}_0)(\varDelta\mathrm{A})^m + (\varDelta\mathrm{A}_1)(\varDelta\mathrm{A})^{m-1} + (\varDelta\mathrm{A}_2)(\varDelta\mathrm{A})^{m-2} + \cdots + \\ + (\varDelta\mathrm{A}_{m-1})(\varDelta\mathrm{A}) + \varDelta\mathrm{A}_m = 0 .$$

(¹) Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL), ser. III, tomo XII.
(²) Preliminari, § 6.

Ora, riducendo le sostituzioni $\varDelta A_0, \varDelta A_1, \ldots \varDelta A_m, \varDelta A$, alla *forma normale* [1] potremo scrivere

$$\varDelta A_h = T^{-1} \left\{ \prod_{1}^{p} {}_g\, R_{h,g} \right\} T ,$$

$$\varDelta A = T^{-1} \left\{ \prod_{1}^{p} {}_g\, R_g \right\} T ,$$

ove

$$R_{h,g} = \begin{Vmatrix} \alpha_{h,g}^{(1)}, & 0 & , 0 & , \ldots 0 \\ \alpha_{h,g}^{(2)}, & \alpha_{h,g}^{(1)} & , 0 & , \ldots 0 \\ \alpha_{h,g}^{(3)}, & \alpha_{h,g}^{(2)} & , \alpha_{h,g}^{(1)} & , \ldots 0 \\ . & . & . & . \\ \alpha_{h,g}^{(\chi_g)}, & \alpha_{h,g}^{(\chi_g-1)} & , \alpha_{h,g}^{(\chi_g-2)} & , \ldots \alpha_{h,g}^{(1)} \end{Vmatrix}$$

$$R_g = \begin{Vmatrix} \alpha_g^{(1)} & , 0 & , 0 & , \ldots 0 \\ \alpha_g^{(2)} & , \alpha_g^{(1)} & , 0 & , \ldots 0 \\ \alpha_g^{(3)} & , \alpha_g^{(2)} & , \alpha_g^{(1)} & , \ldots 0 \\ . & . & . & . \\ \alpha_g^{(\chi_g)} & , \alpha_g^{(\chi_g-1)} & , \alpha_g^{(\chi_g-2)} & , \ldots \alpha_g^{(1)} \end{Vmatrix},$$

mentre

$$\chi_1 + \chi_2 + \cdots + \chi_p = n ,$$

e T è una sostituzione a determinante diverso da zero. Ne segue

$$(7) \qquad R_{0,g}\, R_g^m + R_{1,g}\, R_g^{m-1} + R_{2,g}\, R_g^{m-2} + \cdots + R_{m-1,g}\, R_g + R_{m,g} = 0 . \qquad (g = 1 , 2 , \ldots p) .$$

Potremo dunque prendere $\alpha_g^{(1)}$ eguale ad una qualunque delle radici della equazione algebrica di grado m

$$(8) \qquad \alpha_{0,g}^{(1)} x^m + \alpha_{1,g}^{(1)} x^{m-1} + \alpha_{2,g}^{(1)} x^{m-2} + \cdots + \alpha_{m-1,g}^{(1)} x + \alpha_{m,g}^{(1)} = 0 .$$

Ottenuto $\alpha_g^{(1)}$, i valori di $\alpha_g^{(2)}, \alpha_g^{(3)}, \ldots \alpha_g^{(\chi_g)}$, tali che la (7) sia soddisfatta, si calcoleranno risolvendo successive equazioni lineari.

Le diverse sostituzioni $\varDelta A$, e quindi le diverse A, che verificano la (III_a) si avranno dunque mediante la risoluzione di equazioni algebriche (8) di

(1) *Sui fondamenti della teoria delle equazioni differenziali lineari.* Parte prima. Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL), ser. III, vol. VI, Preliminari, § 2. Vedi anche Parte seconda (prec. citata), Preliminari, § 6.

grado m e di equazioni lineari, e a seconda delle combinazioni delle varie radici delle equazioni (8) si otterranno altrettante soluzioni.

Ad ogni sostituzione A che verifica la (III_a) corrisponderà una funzione F che soddisfa l'equazione integrale (III).

6. Sia ora $\Psi(x, y)$ una funzione qualunque permutabile di 2ª specie colla (II). Poniamo

$$e_{rs} = \int_0^1\int_0^1 \Psi(x, y)\, \varphi_r(x)\, f_s(y)\, dx\, dy\,,$$

$$\mathrm{E} = \left\{\begin{matrix} e_{11}, e_{12}, \dots e_{1n} \\ e_{21}, e_{22}, \dots e_{2n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ e_{n1}, e_{n2}, \dots e_{nn} \end{matrix}\right\}.$$

In virtù delle permutabilità avremo

$$\int_0^1 \Psi(x, \xi)\, \Sigma_i \Sigma_s\, b_{is}\, f_i(\xi)\, \varphi_s(y)\, d\xi = \int_0^1 \Psi(\xi, y)\, \Sigma_i \Sigma_s\, b_{is}\, f_i(x)\, \varphi_s(\xi)\, d\xi\,,$$

quindi

$$\int_0^1\int_0^1 \varphi_h(x)\, f_r(y)\, dx\, dy \int_0^1 \Psi(x, \xi)\, \Sigma_i \Sigma_s\, b_{is}\, f_i(\xi)\, \varphi_s(y)\, d\xi =$$

$$= \int_0^1\int_0^1 \varphi_h(x)\, f_r(y)\, dx\, dy \int_0^1 \Psi(\xi, y)\, \Sigma_i \Sigma_s\, b_{is}\, f_i(x)\, \varphi_s(\xi)\, d\xi\,,$$

vale a dire

$$\Sigma_i \Sigma_s\, b_{is} \int_0^1\int_0^1 \Psi(x, \xi)\, \varphi_h(x)\, f_i(\xi)\, dx\, d\xi \int_0^1 \varphi_s(y)\, f_r(y)\, dy =$$

$$= \Sigma_i \Sigma_s\, b_{is} \int_0^1 \varphi_h(x)\, f_i(x)\, dx \int_0^1\int_0^1 \Psi(\xi, y)\, \varphi_s(\xi)\, f_r(y)\, d\xi\, dy$$

d'onde

(9) $$\mathrm{E B} \mathit{A} = \mathit{A} \mathrm{B E}.$$

Scriviamo

$$\Psi(x, y) = \Sigma_h \Sigma_k\, m_{hk}\, f_h(x)\, \varphi_k(y) + \Theta(x, y)$$

colla condizione

$$\int_0^1\int_0^1 \Theta(x, y)\, \varphi_r(x)\, f_s(y)\, dx\, dy = 0. \quad (r, s = 1, 2, \dots n)$$

Posto

$$\mathrm{M} = \left\{\begin{matrix} m_{11}, m_{12}, \dots m_{1n} \\ m_{21}, m_{22}, \dots m_{2n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ m_{n1}, m_{n2}, \dots m_{nn} \end{matrix}\right\},$$

sarà
$$E = \varLambda M \varLambda .$$
Quindi, in virtù della (9),
$$(\varLambda M)(\varLambda B) = (\varLambda B)(\varLambda M),$$
onde la funzione
$$\Sigma_h \Sigma_k m_{hk} f_h(x) \varphi_k(y)$$
sarà permutabile colla (II) e perciò anche Θ sarà permutabile colla (II), cioè
$$\int_0^1 \Theta(x, \xi) \Sigma_i \Sigma_s b_{is} f_i(\xi) \varphi_s(y) d\xi = \int_0^1 \Sigma_i \Sigma_s b_{is} f_i(x) \varphi_s(\xi) \Theta(\xi, y) d\xi .$$

Moltiplicando per $f_h(y)\, dy$ e integrando fra 0 e 1 si avrà
$$\int_0^1 f_h(y)\, dy \int_0^1 \Theta(x, \xi) \Sigma_i \Sigma_s b_{is} f_i(\xi) \varphi_s(y) d\xi =$$
$$= \Sigma_i \Sigma_s b_{is} f_i(x) \int_0^1 \int_0^1 \Theta(\xi, y) \varphi_s(\xi) f_h(y) d\xi\, dy = 0 ,$$
ovvero
$$\Sigma_i \Sigma_s b_{is} \lambda_{sh} \int_0^1 \Theta(x, \xi) f_i(\xi) d\xi = 0 . \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

Ne segue, supposto il determinante della sostituzione $B\varLambda$ diverso da zero,

$$\int_0^1 \Theta(x, \xi) f_i(\xi) d\xi = 0 . \qquad (i = 1, 2, \ldots n). \tag{10}$$

In modo perfettamente analogo si ha

$$\int_0^1 \Theta(\xi, y) \varphi_i(\xi) d\xi = 0 . \qquad (i = 1, 2, \ldots n) . \tag{10'}$$

Ora la funzione più generale che soddisfa le (10) e (10′) è (¹)

$$\Theta(x, y) = \Omega(x, y) - \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_s \mu_{is} \varphi_s(y) \int_0^1 \Omega(x, \xi) f_i(\xi) d\xi \tag{11}$$
$$- \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_s \mu_{is} f_i(x) \int_0^1 \Omega(\xi, y) \varphi_s(\xi) d\xi +$$
$$+ \Sigma_h \Sigma_k f_h(x) \varphi_k(y) \Sigma_i \Sigma_s \mu_{ik} \mu_{hs} \int_0^1 \int_0^1 \Omega(\xi, \eta) \varphi_s(\xi) f_i(\eta) d\xi\, d\eta$$

(¹) Cfr. Lauricella, *Sopra alcune equazioni integrali*. Rend. Accad. Lincei, Seduta 7 giugno 1908.

ove

$$\left\lvert \begin{matrix} \mu_{11}, \mu_{12}, \dots \mu_{1n} \\ \mu_{21}, \mu_{22}, \dots \mu_{2n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \mu_{n1}, \mu_{n2}, \dots \mu_{nn} \end{matrix} \right\rvert = \Delta^{-1}$$

e $\Omega(x, y)$ è una funzione arbitraria. Prendendo dunque la funzione più generale della forma (I) permutabile di 2ª specie con (II), ottenuta colla regola delle sostituzioni permutabili, e aggiungendovi la (11) si otterrà la funzione più generale $\Psi(x, y)$ permutabile con (II).

7. Ritornando alla equazione integrale (III) di grado m, osserviamo che, se alla soluzione F, avente la forma (I), aggiungiamo la funzione Θ otterremo sempre, in virtù delle relazioni (10) e (10′), una funzione che soddisfa l'equazione integrale stessa, ed avremo così la funzione più generale permutabile con la (II) che vi soddisfa.

8. Se prendiamo

$$f_i(x) = \varphi_i(x) \qquad (i = 1, 2, \dots n)$$

e supponiamo che queste funzioni siano normalizzate, sarà $\Delta = 1$ e

$$\Phi(x, y) = \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_s b_{is} f_i(x) f_s(y),$$

$$F(x, y) = \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_s a_{is} f_i(x) f_s(y).$$

Quando le funzioni $f_1, f_2, \dots f_n$ fanno parte di un sistema normalizzato $f_1, f_2, \dots f_N$, (essendo $N > n$) otterremo delle funzioni Θ che verificano le (10) e (10′) prendendo

$$\Theta = \sum_{n+1}^N{}_i \sum_{n+1}^N{}_s q_{is} f_i(x) f_s(y),$$

ove le q_{is} sono costanti arbitrarie. È facile estendere il resultato al caso $N = \infty$.

9. Mi sono permesso di presentare le precedenti osservazioni in occasione della pubblicazione dei resultati eleganti e di notevole interesse dovuti al prof. Sinigaglia.

Mi sembra che, ponendo in luce il collegamento della questione delle funzioni permutabili di 2ª specie con quella della permutabilità delle sostituzioni, si riconosca la vera natura del problema e si possa penetrare nella sua intima essenza. Nel tempo stesso possono così anche ottenersi varie estensioni e delle applicazioni del problema medesimo come abbiamo veduto nel § 5.

Vi è poi da osservare che i metodi che servono per le funzioni permutabili di 1ª specie sono diversi da questo applicabili alle funzioni permutabili di 2ª specie.