ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVIII.

1911

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1911

Matematica. — *Sulla espressione del resto in una operazione funzionale usata da Lord Rayleigh*. Nota del Socio T. Levi-Civita.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sulla risoluzione dell'equazione integrale di 1ª specie*. Nota del Corrisp. G. Lauricella.

In una Nota, presentata all'Accademia nella seduta del 7 giugno 1908 [1], ho introdotto, per lo studio e per la risoluzione dell'equazione integrale di 1ª specie a limiti costanti, la considerazione delle funzioni ortogonali di Schmidt, ed ho scritti, in termini noti, i coefficienti dello sviluppo della soluzione della equazione integrale medesima in serie di funzioni ortogonali, dimostrando (§ 4_1, pag. 780) che se essa serie, moltiplicata per il nucleo, è integrabile termine a termine in tutto il campo, rappresenterà certamente una soluzione dell'equazione integrale data. Nella medesima Nota ed in un'altra del 6 settembre 1908 [2], ho date poi due condizioni necessarie (§ 3_1, pag. 780 della prima Nota; § 2, pag. 195 della seconda Nota) per l'esistenza di una soluzione di una equazione integrale di 1ª specie. In seguito il Picard [3], usufruendo di un noto teorema di Riesz, ha dimostrato, per il caso di un nucleo chiuso, che queste condizioni, le quali si riducono allora ad una solamente, sono necessarie e sufficienti; e subito dopo io, guidato dall'idea di Picard, di usufruire cioè del teorema di Riesz, ho dimostrato [4] che anche nel caso di un nucleo non chiuso, le due condizioni necessarie, trovate nelle precedenti mie Note, sono sufficienti.

Qui mi propongo di dimostrare che, in virtù di un recente teorema di Weyl [5], quando è soddisfatta una delle due condizioni (quella comune a tutti i casi) di esistenza della soluzione dell'equazione integrale di 1ª specie,

(1) *Sopra alcune equazioni integrali*. Rendic. della R. Acc. dei Lincei, vol. XVII, serie 5ª.

(2) *Sulle vibrazioni delle piastre elastiche incastrate*. Ibid.

(3) *Quelques remarques sur les équations intégrales de première espèce*, ecc. Comptes rendus, 14 juin 1909.

(4) *Sull'equazione integrale di 1ª specie*. Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, vol. XVIII, serie 5ª.

(5) *Ueber die Konvergenz von Reihen, die nach Orthogonalfunctionen forschreiten*. Math. Annalen, Bd. LXVII, 1909. Cfr. M. Plancherel, *Contribution à l'étude de la représentation d'une function*, ecc. Rend. del Circolo Mat. di Palermo, t. XXX.

il corrispondente sviluppo in serie di funzioni ortogonali, per un conveniente aggruppamento dei suoi termini, è convergente in tutto il campo, eccettuato al più un insieme di punti di misura nulla, ed ancora che questo sviluppo, così modificato, moltiplicato per una funzione *sommabile* (cioè integrabile nel senso di Lebesgue) insieme al suo quadrato, è integrabile termine a termine; sicchè, supposta soddisfatta anche l'altra delle due condizioni di esistenza, *esso sviluppo rappresenterà sempre nel campo che si considera (eccettuati al più i punti di un insieme di misura nulla) una soluzione dell'equazione integrale data.* In questo modo si ha una rappresentazione analitica della soluzione di un'equazione integrale di 1ª specie, tutte le volte che essa soluzione esiste. L'indeterminazione dei valori di questa soluzione in un insieme di punti di misura nulla, dipende evidentemente dalla natura stessa del problema; anzi si possono fissare ad arbitrio in questi punti, quando si presentano, i valori della soluzione. La dimostrazione di questo teorema rappresenta nello stesso tempo una nuova dimostrazione della sufficienza delle condizioni di esistenza di una soluzione delle equazioni integrali di 1ª specie. È per questa ragione che nella presente Nota presuppongo solamente la conoscenza del teorema di Weyl e della teoria delle funzioni ortogonali di Schmidt.

È importante osservare che, se il nucleo dell'equazione integrale non ha discontinuità alcuna nel suo campo di variabilità, le corrispondenti funzioni ortogonali non avranno discontinuità; e quindi, poichè, in virtù del teorema di Weyl, la serie che rappresenta la soluzione, modificata nel modo anzidetto, è equiconvergente in qualunque campo che escluda i punti di indeterminazione (i quali formano, come si è detto, un insieme di misura nulla) con segmenti che li contengano nel loro interno (*convergente uniformemente in generale*), ne segue che le discontinuità della soluzione della equazione integrale potranno presentarsi al più nei punti di questo insieme di misura nulla; per modo che essa soluzione sarà certamente integrabile nel senso di Riemann; e quindi i risultati stessi devono potersi dimostrare senza ricorrere al concetto di integrale di Lebesgue. La medesima osservazione può farsi nel caso in cui il nucleo ha nel suo campo di variabilità un numero finito di punti e di linee di discontinuità; e non è escluso che essa possa ripetersi in casi nei quali il nucleo, pur avendo un numero infinito di punti e di linee di discontinuità, sia integrabile nel senso di Riemann (¹).

In fine della presente Nota dò poi un metodo per ricondurre la risoluzione di un'equazione integrale di 1ª specie a nucleo non simmetrico, alla risoluzione di un'equazione pure di 1ª specie a nucleo simmetrico.

(¹) Tale è ad es. il caso di una funzione che abbia un numero infinito di rette di discontinuità parallele ad uno dei due assi, supposto che i punti di intersezione di queste rette con l'altro asse formino un insieme di misura nulla.

1. Il teorema di Weyl si può così enunciare: Se

$$f_1(s)\,,\,f_2(s)\,,\,\dots$$

è una serie di funzioni sommabili (integrabili nel senso di Lebesgue) nel campo $\overline{ab}$, insieme ai loro quadrati, la quale sia *convergente in media*, la quale cioè soddisfaccia alla condizione:

$$\lim_{p,q=\infty} \int_a^b \{f_p(s) - f_q(s)\}^2\, ds = 0\,;$$

indicando con ε_m il limite superiore dei valori dell'espressione:

$$\int_a^b \{f_m(s) - f_{m+p}(s)\}^2\, ds\,, \qquad (p = 1\,,\,2\,,\dots),$$

ed estraendo dalla serie delle ε_m una qualsiasi serie convergente:

$$\varepsilon_{n_1} + \varepsilon_{n_2} + \cdots\,,$$

si avrà che la corrispondente serie di funzioni:

(1) $$f_{n_1}\,,\,f_{n_2}\,,\,\dots$$

convergerà, secondo una locuzione introdotta da Weyl stesso, *uniformemente in generale* nel campo $\overline{ab}$, ossia, indicando con δ una quantità positiva ad arbitrio, la serie (1) convergerà in ugual grado in un campo B_δ, facente parte di $\overline{ab}$, e di cui la misura non è inferiore a $b - a - \delta$, verso una funzione $f(s)$. La funzione $f(s)$ sarà così determinata nel campo $\overline{ab}$, astrazione fatta al più per i punti di un insieme di misura nulla; ed ancora la funzione $f(s)$ sarà sommabile insieme al suo quadrato e si avrà:

(2) $$\lim_{p=\infty} \int_a^b \{f(s) - f_p(s)\}^2\, ds = 0\,.$$

Importa aggiungere che, in virtù della (2), qualunque altra serie convergente uniformemente in generale nel campo $\overline{ab}$, che si può trarre dalla serie data $f_1(s)\,,\,f_2(s)\,,\dots$ convergerà sempre verso la funzione $f(s)$; e convergerà pure verso la funzione $f(s)$ in un certo campo $\overline{\alpha\beta}$, contenuto in $\overline{ab}$, qualunque serie convergente in $\alpha\beta$, che si può trarre dalla data.

2. Sia $K(s\,,\,t)$ una funzione sommabile insieme al suo quadrato nel campo $a \leq s \leq b\,,\; a \leq t \leq b\,.$

In virtù della teoria di Schmidt [1], esisterà una serie finita od infinita (numerabile) di coppie di funzioni ortogonali:

$$\varphi_1(s)\,,\,\psi_1(s)\ ;\ \varphi_2(s)\,,\,\psi_2(s)\ ;\ \ldots$$

ed una corrispondente serie di costanti positive:

$$\lambda_1\,,\,\lambda_2\,,\ldots\,,$$

che avrà il solo punto limite $\lambda=\infty$, se sarà infinita, per le quali si abbia:

$$\varphi_i(s)=\lambda_i\int_a^b \mathrm{K}(s\,,t)\,\psi_i(t)\,dt\,,$$

$$\psi_i(s)=\lambda_i\int_a^b \mathrm{K}(t\,,s)\,\varphi_i(t)\,dt\,.$$

Ciò premesso, si consideri l'equazione integrale di 1ª specie:

$$g(s)=\int_a^b \mathrm{K}(s\,,t)\,h(t)\,dt\,; \tag{3}$$

e, supposto che essa ammetta una soluzione $h(t)$, si ponga:

$$d_\nu=\int_a^b g(t)\,\varphi_\nu(t)\,dt=\int_a^b\int_a^b \mathrm{K}(\tau\,,t)\,h(t)\,\varphi_\nu(\tau)\,dt\,d\tau=$$
$$=\int_a^b h(t)\,dt\int_a^b \mathrm{K}(\tau\,,t)\,\varphi_\nu(\tau)\,d\tau=\frac{1}{\lambda_\nu}\int_a^b h(t)\,\psi_\nu(t)\,dt\,.$$

Se il quadrato di $h(t)$ è sommabile nel campo $\overline{ab}$, si avrà:

$$0\leq\int_a^b\Big\{h(t)-\sum_1^i{}_\nu\, d_\nu\,\lambda_\nu\,\psi_\nu(t)\Big\}^2 dt=$$
$$=\int_a^b\{h(t)\}^2\,dt+\sum_1^i{}_\nu\,\lambda_\nu^2\,d_\nu^2-2\sum_1^i{}_\nu\,\lambda_\nu\,d_\nu\int_a^b h(t)\,\psi_\nu(t)\,dt=$$
$$=\int_a^b\{h(t)\}^2\,dt-\sum_1^i{}_\nu\,\lambda_\nu^2\,d_\nu^2\,.$$

Quindi *la serie* $\sum_1^\infty{}_\nu\,\lambda_\nu^2 d_\nu^2$ *dovrà essere convergente* [2].

Supposto in generale che il nucleo $\mathrm{K}(s,t)$ non sia chiuso, indichiamo con

$$\theta_1(s)\,,\,\theta_2(s)\,,\ldots \tag{4}$$

[1] *Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen.* Math. Annalen, Bd. LXIII, 1907.

[2] Cfr. il § 2, pag. 195 della seconda delle mie citate Note.

le *soluzioni effettive* (¹) dell'equazione:

$$\int_a^b \mathrm{K}(s\,,t)\,\theta_i(s)\,ds = 0\,. \tag{5}$$

Nell'ipotesi sempre che l'equazione (3) ammetta una soluzione, *si deve necessariamente avere* (²):

$$\int_a^b g(s)\,\theta_i(s)\,ds = \int_a^b h(t)\,dt \int_a^b \mathrm{K}(s\,,t)\,\theta_i(s)\,ds = 0\,. \tag{6}$$

3. Ora *si supponga la serie* $\sum_1^\infty {}_\nu \lambda_\nu^2 d_\nu^2$ *convergente*. Posto:

$$f_p(s) = \sum_1^p {}_\nu\, d_\nu\, \lambda_\nu\, \psi_\nu(s)\,,$$

sarà, per $q > p$,

$$\int_a^b \{f_p(s) - f_q(s)\}^2\,ds = \int_a^b \left\{\sum_{p+1}^q {}_\nu\, d_\nu\, \lambda_\nu\, \psi_\nu(s)\right\}^2 ds = \sum_{p+1}^q {}_\nu\, d_\nu^2\, \lambda_\nu^2\,;$$

e quindi, in virtù dell'ipotesi fatta,

$$\lim_{p,q=\infty} \int_a^b \{f_p(s) - f_q(s)\}^2\,ds = 0\,.$$

Si avrà inoltre:

$$\varepsilon_m = \sum_{m+1}^\infty {}_\nu\, \lambda_\nu^2\, d_\nu^2\,.$$

Scelto l'insieme $\varepsilon_{n_1}\,, \varepsilon_{n_2}\,, \ldots$ in modo che, come si può sempre fare, la serie

$$\varepsilon_{n_1} + \varepsilon_{n_2} + \cdots$$

sia convergente, si consideri la funzione $f(s)$ verso la quale, in virtù del teorema di Weyl, converge uniformemente nel campo B_δ (δ essendo data ad arbitrio) la corrispondente serie di funzioni:

$$f_{n_1}(s)\,, f_{n_2}(s)\,, \ldots$$

(¹) Cfr. Lauricella, *Sopra gli sviluppi in serie di funzioni ortogonali*. Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo, t. XXIX, 1910.

(²) Questa condizione necessaria è contenuta, come dimostrai al § 3 (pag. 73) della terza delle mie citate Note, nella condizione necessaria stabilita al § 3₁ (pag. 780) della mia prima Nota.

Si ha evidentemente per un indice p qualsiasi:

$$\int_{B_\delta} \{f(s) - K(t,s)\}^2\, ds \leq 2\int_{B_\delta} \{f(s) - f_p(s)\}^2\, ds + \\ + 2\int_{B_\delta} \{f_p(s) - K(t,s)\}^2\, ds \leq 2\int_a^b \{f(s) - f_p(s)\}^2\, ds + \\ + 2\int_a^b \{f_p(s) - K(t,s)\}^2\, ds\,;$$

e poichè il 3° membro della disuguaglianza non dipende da δ, avremo che esiste ed è certamente finito il

$$\lim_{\delta=0} \int_{B_\delta} \{f(s) - K(t,s)\}^2\, ds = \int_a^b \{f(s) - K(t,s)\}^2\, ds\,;$$

e quindi ancora sarà determinato e finito l'integrale:

$$\frac{1}{2}\int_a^b \left[\{f(s)\}^2 + \{K(t,s)\}^2 - \{f(s) - K(t,s)\}^2 \right] ds = \int_a^b K(t,s)\, f(s)\, ds\,.$$

Dalla disuguaglianza:

$$\left(\int_a^b \{f(s) - f_p(s)\}\, K(t,s)\, ds \right)^2 \leq \int_a^b \{f(s) - f_p(s)\}^2\, ds \,.\, \int_a^b \{K(t,s)\}^2\, ds\,,$$

e dalla (2) risulta poi:

$$\lim_{p=\infty} \int_a^b K(t,s)\, f_p(s)\, ds = \int_a^b K(t,s)\, f(s)\, ds\,;$$

e quindi, essendo:

$$\int_a^b K(t,s)\, f_p(s)\, ds = \sum_1^p{}_\nu\, \lambda_\nu\, d_\nu \int_a^b K(t,s)\, \psi_\nu(s)\, ds = \sum_1^p{}_\nu\, d_\nu\, \varphi_\nu(t)\,,$$

risulterà:

$$\int_a^b K(t,s)\, f(s)\, ds = \sum_1^\infty{}_\nu\, d_\nu\, \varphi_\nu(t) = g_1(t)\,. \tag{7}$$

Importa notare che, in virtù della disuguaglianza:

$$\left(\sum_1^p{}_\nu\, d_\nu\, \varphi_\nu(t) \right)^2 = \left(\int_a^b K(t,s)\, f_p(s)\, ds \right)^2 \leq \int_a^b \{K(t,s)\}^2\, ds \,.\, \int_a^b \{f_p(s)\}^2\, ds = \\ = \int_a^b \{K(t,s)\}^2\, ds \,.\, \sum_1^p{}_\nu\, \lambda_\nu^2\, d_\nu^2 \leq \int_a^b \{K(t,s)\}^2\, ds \,.\, \sum_1^\infty{}_\nu\, \lambda_\nu^2\, d_\nu^2\,,$$

la serie al secondo membro della (7) è equiconvergente in tutto il campo $\overline{ab}$; sicchè potremo scrivere per un indice μ qualsiasi:

$$\int_a^b g_1(t)\,\varphi_\mu(t)\,dt = \sum_1^\infty{}_\nu\, d_\nu \int_a^b \varphi_\mu(t)\,\varphi_\nu(t)\,dt = d_\mu\,;$$

e così si avrà:

$$\int_a^b \varphi_\mu(t) \left\{ g(t) - g_1(t) \right\} dt = 0\,,$$

qualunque sia l'indice μ. Questo significa (¹) che la funzione $\theta(s) = g(s) - g_1(s)$ è soluzione dell'equazione (5). Ora si ha per una soluzione $\theta_i(s)$ qualsiasi dell'equazione (5):

$$\int_a^b \theta_i(t)\,g_1(t)\,dt = \sum_1^\infty{}_\nu\, d_\nu \int_a^b \varphi_\nu(t)\,\theta_i(t)\,dt = 0\,;$$

per cui si avrà in particolare:

$$\int_a^b \theta(t)\,g_1(t)\,dt = 0\,.$$

Ciò premesso, *supponiamo che la funzione* $g(s)$ *soddisfaccia alla condizione* (6). Si avrà:

$$\int_a^b \theta(t)\,.\,g(t)\,dt = 0\,;$$

e quindi:

$$\int_a^b \left\{\theta(t)\right\}^2 dt = \int_a^b \theta(t) \left\{ g(t) - g_1(t) \right\} dt = 0.$$

Si avrà dunque in tutto il campo $\overline{ab}$, escluso al più un insieme di punti di misura nulla:

$$\int_a^b \mathrm{K}(t\,,s)\,f(s)\,ds = g(t)\,.$$

4. Nel caso in cui il nucleo $\mathrm{K}(s\,,t)$ non è chiuso, se $\chi(t)$ è la funzione più generale del campo $\overline{ab}$, per la quale la serie:

$$\sum{}_\mu\, \psi_\mu(t) \int_a^b \chi(r)\,\psi_\mu(r)\,dr$$

è integrabile termine a termine nel campo $\overline{ab}$, la soluzione più generale dell'equazione:

$$\int_a^b \mathrm{K}(s\,,t)\,\varrho(t)\,dt = 0$$

(¹) Schmidt, loc. cit., pag. 464.

sarà data da [1]:

$$\varrho(t) = \chi(t) - \sum_\mu \psi_\mu(t) \int_a^b \chi(r)\, \psi_\mu(r)\, dr\,;$$

e quindi la soluzione più generale dell'equazione (3) sarà data da:

$$h(s) = f(s) + \varrho(s)\,.$$

Osserviamo che si può scrivere:

$$f(s) = f_{n_1}(s) + \{f_{n_2}(s) - f_{n_1}(s)\} + \{f_{n_3}(s) - f_{n_2}(s)\} + \cdots,$$

ossia:

$$f(s) = \sum_1^{n_1}{}_\nu\, d_\nu\, \lambda_\nu\, \psi_\nu(s) + \sum_{n_1+1}^{n_2}{}_\nu\, d_\nu\, \lambda_\nu\, \psi_\nu(s) + \cdots \tag{8}$$

Riepilogando si ha così il seguente teorema: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè l'equazione integrale* (3) *ammetta una soluzione sommabile insieme al suo quadrato nel campo* $\overline{ab}$, *è che la funzione data* $g(s)$ *sia tale che la serie* $\sum_\nu \lambda_\nu^2\, d_\nu^2$ *converga e che inoltre, nel caso in cui il nucleo* $\mathrm{K}(s\,,t)$ *non è chiuso, essa* $g(s)$ *soddisfaccia alla condizione* (6). *Tutte le volte che queste condizioni sono soddisfatte, i termini della serie* $\sum_\nu d_\nu\, \lambda_\nu\, \psi_\nu(s)$ *si possono aggruppare ordinatamente in modo che essa risulti convergente uniformemente in generale in tutto il campo* $\overline{ab}$, *e la somma* $f(s)$ *di questa serie, così modificata, sarà una soluzione dell'equazione* (3). *La soluzione più generale di questa equazione si otterrà aggiungendo alla* $f(s)$ *l'espressione* $\varrho(s)$.

5. Osserviamo che *la serie* $\sum_\nu d_\nu\, \lambda_\nu\, \psi_\nu(s)$ *in tutti quei punti nei quali è convergente, rappresenta sempre la soluzione* $f(s)$ *dell'equazione* (3). Infatti ciò è evidente se il punto s è di quelli nei quali la serie (8) è convergente uniformemente in generale, ossia se il punto s è di quelli nei quali la $f(s)$ è determinata. Se il punto s fa parte del gruppo di misura nulla, nel quale la $f(s)$ non è determinata, basterà prendere per valore di $f(s)$ in tale punto il valore della somma $\sum_\nu d_\nu\, \lambda_\nu\, \psi_\nu(s)$.

6. Dimostriamo ora che *l'equazione integrale* (3) *a nucleo non simmetrico equivale sempre all'equazione integrale a nucleo simmetrico*:

$$g_1(r) = \int_a^b \underline{\mathrm{K}}(s\,,t)\, h(t)\, dt\,, \tag{3$'$}$$

dove:

$$g_1(r) = \int_a^b \mathrm{K}(s\,,r)\, g(s)\, ds \quad , \quad \underline{\mathrm{K}}(r\,,t) = \int_a^b \mathrm{K}(s\,,r)\, \mathrm{K}(s\,,t)\, ds\,. \tag{9}$$

[1] Cfr. Lauricella, la prima delle citate Note, § 6, pag. 482.

Infatti, moltiplicando i membri della (3) per $K(s, r)$ ed integrando a tutto il campo $\overline{ab}$, si ha ovviamente la (3)'; ossia se $h(t)$ è una soluzione dell'equazione (3), soddisferà all'equazione (3)'.

Viceversa sia $h(t)$ una soluzione dell'equazione (3)'. Tenendo conto delle (9), si avrà:

$$\int_a^b K(s, r) \left\{ g(s) - \int_a^b K(s, t)\, h(t)\, dt \right\} ds = 0 ;$$

e perciò l'espressione:

$$\theta(s) = g(s) - \int_a^b K(s, t)\, h(t)\, dt$$

sarà una soluzione dell'equazione (5). Se il nucleo $K(s, t)$ è chiuso, dovrà quindi aversi:

$$g(s) = \int_a^b K(s, t)\, h(t)\, dt \tag{10}$$

in tutto il campo $\overline{ab}$, esclusi al più i punti di un insieme di misura nulla.

Se il nucleo non è chiuso, si rammenti che la $g(s)$ allora deve soddisfare alle condizioni (6); per cui si avrà in particolare:

$$\int_a^b g(s) . \theta(s)\, ds = 0 ;$$

e poichè:

$$\int_a^b \theta(s)\, ds \int_a^b K(s, t)\, h(t)\, dt = \int_a^b h(t)\, dt \int_a^b K(s, t) . \theta(s)\, ds = 0 ,$$

risulterà:

$$\int_a^b \{\theta(s)\}^2\, ds = \int_a^b \theta(s) \left\{ g(s) - \int_a^b K(s, t)\, h(t)\, dt \right\} ds = 0 ;$$

e quindi anche nel caso in cui il nucleo non è chiuso dovrà valere la (10).