ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVIII.

1911

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1911

Matematica. — *Sulle superficie e varietà algebriche irregolari di genere geometrico nullo.* Nota del Corrispondente FRANCESCO SEVERI.

Lo studio esauriente delle superficie algebriche irregolari di genere geometrico zero, fu già fatto da Enriques fin dal 1905 (¹) partendo dal legame, allora da poco scoperto (²), tra l'irregolarità di una superficie ed il numero de' suoi integrali semplici di 1ª specie. La proprietà fondamentale da cui occorre muovere per quello studio, è data dall'esistenza di un fascio irrazionale di curve, sopra una superficie irregolare F di genere zero (³).

In questa Nota mi propongo di pervenire a tale proprietà per una via geometrica, che è applicabile anche alle varietà superiori (nn. 6, 7, 8), mentre il procedimento finora seguìto per le superficie, non sembra facilmente estendibile. La dimostrazione cui alludo, oltre ad esser concettualmente assai semplice, parmi anche più appropriata alla natura del risultato da stabilirsi.

Posso qui riassumerne in brevi parole il concetto informativo.

Sulla superficie F di genere $p_g = 0$ e d'irregolarità $q \geq 1$, si assuma un sistema algebrico $\Sigma \infty^1$, di curve C non equivalenti tra loro: ν sia l'indice del sistema, e D la curva composta colle ν curve C uscenti da un punto x di F. Le ∞^2 curve D, che si ottengono al variare di x, non possono essere a due a due equivalenti, perchè lo sarebbero le C. Restano quindi, a priori, possibili due ipotesi:

1) Le D si distribuiscono in gruppi di un numero finito $n(\geq 1)$ di curve equivalenti.

2) Esse distribuisconsi invece in una semplice infinità di sistemi ∞^1, ciascuno dei quali è costituito da curve D equivalenti.

Orbene, si dimostra che l'ipotesi 1) è da scartarsi.

Ciò è evidente senz'altro, quando $q = 1$, perchè i sistemi lineari $|D|$, che appartengono ad un medesimo sistema continuo, non possono essere più che ∞^q tra loro distinti. Nel caso $q > 1$, se fosse possibile l'ipotesi 1), la superficie F o più generalmente una sua involuzione I_n — i cui gruppi sarebbero dati dai punti x di un medesimo sistema di curve D equivalenti —

(¹) Enriques, *Sulle superficie algebriche di genere geometrico zero* (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, t. XX, 1905).

(²) Le citazioni relative si trovano ad es. nell'articolo di Castelnuovo-Enriques alla fine del t. II della *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes* di Picard et Simart (Paris, Gauthier-Villars, 1906), pag. 494.

(³) L'esistenza di un tal fascio era già stata dimostrata da Castelnuovo, sotto l'ipotesi, rivelatasi poi superflua, che F possedesse integrali semplici di 1ª specie.

risulterebbe birazionalmente identica ad una superficie della varietà di Jacobi V_p, rappresentante i gruppi di p elementi dell'ente $\infty^1 \Sigma$, di genere p; mentre invece sulla V_p non possono esistere superficie di genere zero.

In ogni caso resta dunque possibile soltanto l'ipotesi 2). I punti del sistema H formato da ∞^1 curve D equivalenti, riempiono una curva algebrica M, la quale, variando H, descrive sulla F il fascio irrazionale di cui volevasi provare l'esistenza.

1. *Esistenza d'un fascio irrazionale sulle superficie d'irregolarità* $q = 1$. Consideriamo anzitutto una superficie F d'irregolarità 1 (e di genere geometrico qualunque). Si dimostra assai facilmente che la F contiene un *fascio ellittico* di curve.

Si assuma infatti su F un sistema algebrico $\infty^1 \Sigma$ di curve C non equivalenti tra loro: ciò è sempre possibile appunto perchè F è irregolare [1]. I gruppi di ν curve C uscenti dai punti della superficie, dànno luogo ad un sistema Σ' di ∞^2 curve D, le quali non possono essere tutte equivalenti tra loro, perchè lo sarebbero anche le C [2]. Nè può darsi che in Σ' vi sia soltanto un numero finito (zero incluso) di curve equivalenti ad una generica D, perchè si otterrebbe in tal caso su F un sistema continuo formato da ∞^2 sistemi lineari distinti. Ne deriva che, data una generica D, vi sono in Σ' ∞^1, e soltanto ∞^1, curve a quelle equivalenti.

I punti di F da cui escono i gruppi di curve C formanti queste ∞^1 curve D equivalenti, riempiono una curva M, la quale, variando la generica D, da cui siamo partiti, varia su F descrivendo un fascio, giacchè è ben chiaro che per *ogni* punto di F non può passare che una M.

Poichè la serie algebrica segata sopra una data M dalle ∞^1 curve D ad essa relative, è formata da gruppi equivalenti, lo stesso accadrà della serie segata su quella M dalle C [3]. Se pertanto il fascio delle M fosse lineare, dal momento che le C segnano sulle sue curve gruppi equivalenti, ne seguirebbe l'equivalenza di tutte le C [4].

[1] Enriques, *Sulla proprietà caratteristica delle superficie algebriche irregolari* (Rendiconti della R. Accademia delle Scienze di Bologna, 1904). Vedi pure Severi, *Intorno alla costruzione dei sistemi completi non lineari che appartengono ad una superficie irregolare* (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 1905).

[2] Severi, *Il teorema d'Abel sulle superficie algebriche* (Annali di Matematica, 1905), n. 9. Il teorema I di questa Memoria, sopra cui si fonda la proposizione applicata nel testo, fu poi dimostrato geometricamente da Castelnuovo (Rendiconti dei Lincei, 1906).

[3] Severi, *Il teorema d'Abel*, ecc. teorema I; Castelnuovo (Rendiconti dei Lincei, 1906).

[4] Severi, *Il teorema d'Abel*, ecc. n. 6. Il criterio d'equivalenza applicato è ivi dimostrato per via geometrica.

Dunque il fascio delle M è di genere > 0 e quindi, dato il valore dell'irregolarità di F, di genere 1 (¹).

2. *Esistenza d'un fascio irrazionale sopra le superficie di genere geometrico zero e d'irregolarità* $q > 1$. Abbiasi ora una superficie F di genere $p_g = 0$ e d'irregolarità $q > 1$. Assumasi ancora su di essa un sistema $\Sigma \infty^1$, d'indice $\nu > 1$, di curve C non equivalenti. Si può sempre supporre che il genere p di Σ, come ente ∞^1 sia > 1. Ciò equivale ad affermare che sulla varietà V_q di Picard inerente ad F — varietà i cui punti rappresentano gli ∞^q sistemi lineari contenuti in un generico sistema continuo completo di curve tracciate su F — si possono costruire curve di genere > 1. Per convincersene basta p. e. considerare le curve caratteristiche del sistema lineare formato dalle sezioni iperpiane di V_q o di un multiplo abbastanza elevato di questo sistema (curve comuni a $q - 1$ varietà del sistema). Aggiungeremo inoltre l'ipotesi, non restrittiva, che il sistema Σ non sia composto con un'involuzione.

Ciò posto, si considerino le ∞^2 curve D formate coi gruppi di ν curve C uscenti dai punti di F. Per brevità, nel seguito, un punto di F lo chiameremo « il punto ν-plo » della D composta colle ν curve C che escono da quello. Dimostreremo che, entro all'ente Σ, le serie lineari individuate dai *gruppi* D, non possono essere ∞^2 tra loro distinte.

Potremo allora concludere che ogni gruppo D, entro all'ente Σ, ne ha ∞^1, e soltanto ∞^1, equivalenti, perchè se i gruppi D, entro Σ, fossero tutti equivalenti tra loro lo stesso accadrebbe delle curve C su F (²).

3. Se le serie lineari individuate entro Σ dai gruppi D, sono ∞^2, distinte tra loro, vuol dire che ogni gruppo D è equivalente ad $n - 1$ (≥ 0) gruppi analoghi, e su F si ha un'involuzione d'ordine n (≥ 1) i cui gruppi sono formati dai punti ν-pli di quelle n curve D.

Ma, anche qualora fosse $n > 1$, ogni superficie Φ che rappresentasse birazionalmente l'involuzione suddetta, avrebbe evidentemente il genere geometrico nullo (³). Or io dico che la totalità delle ∞^2 serie lineari d'ordine ν, individuate in Σ dalle D, si può riferire birazionalmente ad una varietà ∞^2 di gruppi di p elementi dell'ente Σ, talchè ne seguirà che Φ è birazionalmente identica ad una superficie della varietà di Jacobi V_p, imagine dei gruppi di p elementi dell'ente Σ, o meglio delle ∞^p serie lineari distinte, individuate da questi gruppi (⁴).

(¹) Severi, *Osservazioni sui sistemi continui di curve appartenenti ad una superficie algebrica* (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, 1904). Vedi alla fine del n. 6.

(²) Severi, *Il teorema d'Abel*, ecc. n. 9, teorema *b*). Questo teorema è dimostrato geometricamente.

(³) Basta ricordare come si trasformano per una corrispondenza $(1, n)$ le curve canoniche d'una superficie (Enriques-Severi).

(⁴) Lo studio geometrico d'una tal varietà trovasi in Castelnuovo (Rendiconti del

Introduciamo per brevità una curva S, i cui punti rappresentino le curve di Σ, e indichiamo con G il gruppo di ν punti rappresentante una D fissata genericamente, con G′ il gruppo omologo d'una D variabile, e infine con H un gruppo non speciale di p punti della S. Poichè la serie lineare $|G+H|$, d'ordine $\nu+p$, è non speciale, esisterà, per ogni posizione di G′, la serie $|G+H-G'|$ e si ridurrà generalmente ad un gruppo *non speciale* H′ di p punti, perchè questa circostanza si verifica in particolare quando G′ coincide con G. La varietà delle serie $|G'|$ vien così riferita birazionalmente alla varietà dei gruppi H′ o meglio delle serie $|H'|$.

4. Resta quindi stabilito che la superficie Φ, di genere geometrico nullo, è birazionalmente identica ad una superficie della varietà di Jacobi V_p, priva di varietà eccezionali. Trasformando Φ mediante il gruppo continuo ∞^p delle trasformazioni birazionali di 2ª specie, che appartengono a V_p (¹), data la transitività del gruppo, il sistema algebrico T costituito dalle trasformate di Φ, invaderà tutta la V_p, e sarà quindi almeno di dimensione $p-2$.

Ma ciò è assurdo, perchè la V_p risulterebbe allora di genere geometrico nullo (²), mentre invece il suo genere geometrico vale 1 (n. 5).

Si conclude pertanto che, dato un gruppo D, entro all'ente Σ, ve ne sono ∞^1 altri, e soltanto ∞^1, ad esso equivalenti. I punti ν-pli delle relative curve D riempiono una curva algebrica M e, al variare della D considerata, M descrive un fascio Γ (per *ogni* punto di F passa una sola M).

Poichè la corrispondenza tra una M e l'ente Σ, ove si chiamino omologhi un punto di M e una curva C quando si appartengano, è a valenza zero nel passaggio da M a Σ, sarà a valenza zero anche nel senso inverso (³), il che significa che le C segano sopra ogni M gruppi equivalenti.

Consideriamo ora il sistema continuo completo $\}C\{$ — costituito da ∞^q sistemi lineari distinti — cui appartiene Σ. Poichè Σ si può, senza restrizione, supporre variabile entro $\}C\{$ in tal guisa che risultino assegnabili ad arbitrio in $\}C\{$ due delle curve di Σ, e poichè d'altronde, variando Σ, il fascio Γ, che è già un sistema completo (di grado zero), non può variare, ne consegue che due *qualunque* C segano sopra ogni M gruppi equivalenti, talchè, se esse non sono equivalenti, differiscono per curve del fascio (⁴).

Trattandosi di curve dello stesso ordine, una di quelle C si otterrà dunque dall'altra aggiungendo e togliendo due gruppi di un egual numero di curve di Γ. Il sistema $\}C\{$ conterrà pertanto altrettanti sistemi lineari distinti,

---

R. Istituto lombardo, 1892). Prendendo come elementi di V_p le serie lineari g_p dell'ente Σ, si ottiene una V_p priva di varietà eccezionali.

(¹) Vedi Castelnuovo, loc. cit.

(²) Severi, *Alcune relazioni di equivalenza tra gruppi di punti d'una curva algebrica o tra curve di una superficie* (Atti del R. Istituto veneto, 1911), n. 7, oss. 4ª.

(³) Severi, *Il teorema d'Abel*, ecc. teorema II.

(⁴) Ibidem, n. 6.

quante serie lineari di dato ordine ($\geq p$) son contenute in Γ, e quindi sarà $p = q$. Concludendo:

Ogni superficie di genere geometrico nullo e d'irregolarità $q \geq 1$, contiene un fascio irrazionale di genere q, di curve algebriche (1).

5. *Digressione sul genere geometrico della varietà di Jacobi.* — Nel n. precedente abbiamo dovuto far uso del fatto che una varietà di Jacobi ha il genere 1. Questa proprietà si stabilisce agevolmente per via trascendente (2); ma, dato che qui si tratta di esporre una dimostrazione geometrica dell'esistenza di un fascio irrazionale sopra una superficie irregolare di genere zero, occorrerà che cerchiamo di giungere alla proprietà invocata in modo conforme al nostro scopo.

Dimostreremo che sulla V_q delle q-ple di punti di una curva C di genere p ($q \leq p$), la varietà M_{q-1} delle q-ple tolte dai singoli gruppi di una g^{q-1}_{2p-2} canonica, è una varietà canonica (3).

Poichè il teorema è vero per $q = 1$, lo supporremo dimostrato per le varietà dei gruppi di $q - 1$ punti e lo stabiliremo per le varietà V_q.

La V_q contiene ∞^1 varietà W_{q-1}, irriducibili e birazionalmente identiche, ognuna delle quali rappresenta le q-ple con un punto fisso. Cerchiamo di caratterizzare l'intersezione di una W_{q-1} relativa al punto P, colla M_{q-1} di cui si parla nell'enunciato.

Nella corrispondenza tra le $(q - 1)$-ple di C e i punti di W, alle $(q - 1)$-ple tratte dalla g^{q-2}_{2p-3} residua del punto P rispetto alla fissata g^{q-1}_{2p-2}, risponde una varietà, la quale, addizionata a quella che rappresenta le $(q - 1)$-ple aventi il punto fisso P, pel teorema ammesso, dà una varietà canonica di W. E invero, quando una g^{q-2}_{2p-2} si muove tendendo alla serie $g^{q-2}_{2p-3} + P$, la varietà delle $(q - 1)$-ple tratte dalla prima serie, tende alla varietà delle $(q - 1)$-ple che impongono $q - 2$ condizioni ai gruppi della serie limite, la qual varietà è appunto costituita dalle $(q - 1)$-ple tolte dalla g^{q-2}_{2p-3} e da quelle che hanno il punto fisso P.

E poichè queste ultime sono rappresentate dai punti comuni alla W_{q-1} fissata e alla sua varietà infinitamente vicina, la M_{q-1} viene a segare su W_{q-1} una varietà residua della varietà caratteristica rispetto al sistema canonico. Ne segue che M_{q-1} è una varietà canonica di V_q (4).

In particolare per $p = q$ si ha come varietà canonica la M_{p-1} delle p-ple speciali, la quale si riduce addirittura ad un punto (semplice) di V_p,

(1) Che poi queste curve sieno *razionali* quando $q > 1$, è dimostrato per via geometrica in Enriques (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 2e série, t. III, pag. 83).

(2) Severi, *Sulle superficie che rappresentano le coppie di punti di una curva algebrica* (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, 1903) n. 9.

(3) Ibidem, n. 10.

(4) Severi, *Alcune relazioni di equivalenza*, ecc. n. 7.

se, invece di assumere i punti della varietà di Jacobi come immagini delle p-ple, si assumono come immagini delle serie lineari d'ordine p appartenenti a C.

Sicchè, insomma, sulla V_p priva di varietà eccezionali, il sistema canonico è d'ordine zero, e quindi il genere geometrico di V_p è uguale ad 1.

6. *Estensione delle cose precedenti alle varietà. Esame delle* V_k *che hanno l'irregolarità superficiale* $q < k$. — Si assuma sopra la V_k d'irregolarità superficiale q [1] minore della dimensione k, un sistema $\Sigma \infty^1$ di varietà V_{k-1} non equivalenti. Gli ∞^k gruppi di ν varietà V_{k-1} uscenti dai punti di V_k, dànno luogo a varietà riducibili W, non equivalenti tra loro, perchè altrimenti sarebbero equivalenti i gruppi segati da W sopra una curva qualunque di V_k e quindi anche i gruppi segati sulla stessa curva dalle V_{k-1} [2], il che porterebbe all'equivalenza di queste ultime varietà [3]. Ne deriva che, data una W, ve ne sono ∞^i $(1 \leq i \leq k-1)$ equivalenti a quella.

Il luogo dei punti ν-pli di queste W equivalenti, è una M_i algebrica, la quale, al variare di W, descrive entro V_k un sistema Γ, ∞^{k-i}, d'indice 1.

Sopra ogni M_i le V_{k-1} staccano delle N_{i-1} equivalenti tra loro, perchè la varietà formata dalle ν N_{i-1} che escono da un punto variabile di M_i, si muove in un sistema lineare.

Ciò può anche esprimersi dicendo che le V_{k-1} segano sopra una curva qualunque C di genere π, tracciata su M_i, una serie γ_n^1 con $2\nu(n+\pi-1)$ punti doppî [4].

Se ora si suppone che Σ possa variare in modo continuo in un sistema completo $\}V_{k-1}\{$, costituito da ∞^q sistemi lineari, per ogni posizione di Σ i caratteri numerativi della serie segata su C si mantengono inalterati, onde le varietà di Σ staccheranno sempre su C e quindi [5] anche sopra M_i, varietà equivalenti. Poichè nulla ci vieta di supporre che l'ente Σ sia variabile entro $\}V_{k-1}\{$ in un sistema algebrico tale che due varietà qualunque del sistema continuo completo determinino una (o più) posizioni di Σ, così si conclude che le V_{k-1} del dato sistema completo, staccano varietà equivalenti sopra ogni M_i.

[1] Castelnuovo-Enriques, *Sur les intégrales simples de première espece d'une surface ou d'une variété algébrique à plusieurs dimensions* (Annales de l'École normale supérieure de Paris, 1906). Vedi pure la mia Memoria: *Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche* (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 1909), n. 14.

[2] Severi, *Il teorema d'Abel*, ecc.; Castelnuovo (Rendiconti dei Lincei, 1906).

[3] Severi, *Alcune relazioni di equivalenza*, ecc.; n. 6.

[4] Castelnuovo, *Sulle serie algebriche di gruppi di punti appartenenti ad una curva algebrica* (Questi Rendiconti, 1906).

[5] Severi, loc. ultimamente citato.

Tutte le V_{k-1} si otterranno dunque da una di esse aggiungendo e togliendo due varietà di dimensione $k-1$, appartenenti ad un sistema continuo H, *composto* mediante le M_i. Indicando con γ una varietà a $k-i$ dimensioni, i cui punti sieno le immagini delle M_i di Γ, le varietà di H corrisponderanno a varietà di dimensione $k-i-1$, costituenti un sistema continuo h di γ. Sicchè, tanti saranno i sistemi lineari distinti di $\{V_{k-1}\}$, quanti i sistemi lineari distinti contenuti nel sistema, eventualmente completato, h.

Insomma la varietà V_k e il sistema Γ avranno la stessa irregolarità bidimensionale q (si dovrà dire che q è uguale al genere della curva γ, se $i = k-1$).

Si conclude che:

Ogni varietà algebrica V_k *d'irregolarità superficiale* $q < k$, *contiene un sistema* ∞^{k-i} *d'indice 1, di varietà* M_i $(1 \leq i \leq k-1)$, *avente anche esso l'irregolarità bidimensionale* q.

Si aggiunga che *i valori di* i, *da* 1 *a* $k-1$, *sono tutti quanti possibili* (*non beninteso sopra la stessa varietà*): basta ad es. considerare la varietà V_k delle coppie di punti di una V_{k-i} d'irregolarità superficiale q e di uno spazio lineare S_i.

7. *Varietà* V_k *di genere zero e d'irregolarità superficiale* $q \geq k$. — Scelto su V_k un sistema $\Sigma\infty^1$ di varietà V_{k-1}, e considerate le varietà W composte colle ν V_{k-1} che escono dai punti di V_k, si prova, come nel n. precedente, che entro V_k esiste un sistema $\Gamma\infty^{k-i}$, d'indice 1 e d'irregolarità bidimensionale q, di varietà M_i $(1 \leq i \leq k-1)$ su cui le V_{k-1} del sistema continuo completo cui appartiene Σ, staccano varietà equivalenti. Tutto ciò però a condizione che si sia già dimostrato che gli ∞^k sistemi lineari $|W|$ non possono essere tra loro distinti.

Ora questo fatto si stabilisce con un'ovvia estensione del ragionamento esposto, nel caso delle superficie, nei nn. 3, 4. Se cioè i sistemi $|W|$ fossero ∞^k, la varietà V_k o una sua involuzione — che sarebbe ancora di genere zero — si potrebbe trasformare birazionalmente in una varietà appartenente alla V_p di Jacobi, che corrisponde all'ente Σ, il quale può sempre supporsi di genere $p \geq k$; mentre invece sulla V_p, che è di genere 1, non possono esistere varietà di genere zero.

Si può dunque enunciare che:

Ogni varietà V_k *di genere geometrico nullo e d'irregolarità superficiale* q, *contiene un sistema d'indice* 1 *di varietà* M_i $(1 \leq i \leq k-1)$, *avente anch'esso l'irregolarità bidimensionale* q.

Osservazione. *S'avvertirà che è sempre lecito supporre* $q \geq k-i$. Sia infatti $q < k-i$ e indichiamo con V_{k-i} una varietà i cui punti rappresentino birazionalmente le M_i del sistema Γ. Pel teorema del n. 6, sulla V_{k-i} esisterà un sistema Γ', $\infty^{k-i-i'}$, d'indice 1 e d'irregolarità q, costituito

da varietà $M_{i'}$, e nella corrispondenza tra V_{k-i} e V_k, al sistema Γ' risponderà un sistema Γ_0, $\infty^{k-i-i'}$, d'indice 1 e d'irregolarità q, costituito da varietà $M_{i+i'}$ composte col sistema Γ. Se non è ancora $q \geq k - i - i'$, si potrà similmente proseguire, finchè non si pervenga ad un sistema d'indice 1 e di dimensione non superiore a q.

8. *Proprietà degl'integrali semplici di 1ª specie appartenenti ad una* V_k *di genere zero.* — La nota dimostrazione dell'esistenza di un fascio irrazionale sopra una superficie F di genere zero, fa capo in sostanza all'identità di Noether, che lega ogni coppia d'integrali semplici di 1ª specie ad un integrale doppio di 1ª specie, sopra una qualunque superficie [1].

Non sembra facile estendere alle varietà la relazione di Noether, tanto più perchè, a quanto pare, non una, ma $k-1$ identità debbono ottenersi sopra una V_k, in corrispondenza ad altrettanti legami fra gl'integrali semplici e gl'integrali doppî, tripli, ..., k-pli di 1ª specie.

Comunque, il risultato del n. precedente ci dà modo di stabilir subito l'estensione di quel fatto che sulle superficie di genere zero consegue dalla identità di Noether, e cioè:

Data una V_k *di genere zero e d'irregolarità superficiale* $q > 0$, *esiste un intero* i $(1 \leq i \leq k-1)$, *tale che* $k - i + 1$ *integrali semplici di 1ª specie di* V_k *son sempre funzionalmente dipendenti, mentre non lo sono in generale un numero inferiore di essi.*

Sia infatti Γ il sistema ∞^l $(l = k - i)$, d'irregolarità bidimensionale q, costituito da varietà M_i appartenenti a V_k. Per l'osservazione con cui si chiude il n. precedente, si potrà sempre supporre che sia $q \geq l$.

Fissiamo il modello proiettivo di V_k nello spazio S_{k+1} $(x_1, x_2, ..., x_{k+1})$, in tal guisa che V_k sarà un'ipersuperficie

$$f(x_1, x_2, ..., x_{k+1}) = 0$$

di questo spazio; e sia inoltre

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{l+1}) = 0$$

l'equazione di una V_l — dello S_{l+1} $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{l+1})$ — i cui punti rappresentino birazionalmente le M_i di Γ. Essendo Γ d'indice 1, le ξ risulteranno funzioni razionali del punto x variabile su V_k, e gl'integrali semplici di 1ª specie di V_k, dal momento che V_k e V_l hanno la stessa irregolarità superficiale q, proverranno *tutti* dagl'integrali semplici di 1ª specie di V_l, mediante la sostituzione razionale:

$$\xi_1 = \xi_1(x_1, x_2, ..., x_{k+1}), ..., \xi_l = \xi_l(x_1, x_2, ..., x_{k+1}).$$

[1] Vedi l'osservazione di Castelnuovo alla fine di una Memoria di Enriques pubblicata negli Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 2e série, t. III.

Presi pertanto $l+1$ integrali linearmente indipendenti di V_l (con che si viene implicitamente a supporre che sia $q > l$):

$$\int A_{1s} d\xi_1 + A_{2s} d\xi_2 + \cdots + A_{ls} d\xi_l \ , \ (s = 1, 2, \ldots, l+1) \ ,$$

la matrice jacobiana dei corrispondenti integrali di V_k, considerati come funzioni delle variabili indipendenti $x_1, \ldots, x_k$, sarà

$$\left\| \sum_{r=1}^{l} A_{rs} \frac{d\xi_r}{dx_1} \ , \sum_{r=1}^{l} A_{rs} \frac{d\xi_r}{dx_2} \ , \ \ldots\ldots \ , \sum_{r=1}^{l} A_{rs} \frac{d\xi_r}{dx_k} \right\|^{(1)} (s = 1, 2, \ldots, l+1) \ ,$$

ove, beninteso, le derivate si calcolino tenendo conto che x_{k+1} è funzione algebrica di $x_1, x_2, \ldots x_k$.

Consideriamo un determinante d'ordine $l+1$ estratto da questa matrice, p. es.:

$$\left| \Sigma A_{rs} \frac{d\xi_r}{dx_1} \ , \Sigma A_{rs} \frac{d\xi_r}{dx_2} \ , \ \ldots \ , \Sigma A_{rs} \frac{d\xi_r}{dx_{l+1}} \right| (s = 1, \ldots, l+1) \ .$$

Esso uguaglia il prodotto delle due matrici:

$$\left\| A_{1s}, A_{2s}, \ldots, A_{ls} \right\| \ , \left\| \frac{d\xi_1}{dx_s}, \frac{d\xi_2}{dx_s}, \ldots, \frac{d\xi_l}{dx_s} \right\| (s = 1, \ldots, l+1) \ ;$$

e poichè in queste il numero delle orizzontali supera il numero delle verticali, il determinante prodotto risulterà identicamente nullo. Ciò vale per ogni determinante di ordine massimo estratto dalla matrice funzionale di $l+1$ integrali qualunque di V_k; dunque gl'integrali stessi son funzionalmente dipendenti.

Ci resta da considerare l'ipotesi $q = l$. Se la varietà V_l non ha i suoi integrali di 1ª specie funzionalmente distinti, si conclude facilmente, come sopra, che $l'+1 < l+1$ integrali di 1ª specie di V_k son sempre funzionalmente dipendenti.

Altrimenti, assunto sopra V_l un sistema $\infty^1 \Sigma'$ di varietà V_{l-1} non equivalenti, e considerato l'insieme ∞^l delle varietà W' composte colle ν' V_{l-1} che escono dai singoli punti di V_l, si vede che i sistemi lineari $|W'|$ debbon essere ∞^l, tra loro distinti, perchè altrimenti (n. 6) V_l conterrebbe un sistema $\Gamma' \infty^{l-i'}$ d'indice 1 e d'irregolarità l, di varietà $M_{i'}$, e gl'integrali semplici di V_l non sarebbero più funzionalmente distinti.

Ma dunque i sistemi $|W'|$ si distribuiscono in ∞^l gruppi, ognuno dei quali è formato da $n(\geq 1)$ sistemi $|W'|$ equivalenti, sicchè gli n punti ν'-pli di n varietà W' tra loro equivalenti, formano un gruppo variabile in una involuzione I_n, birazionalmente identica alla varietà di Picard annessa a

(1) Indichiamo la matrice scrivendo soltanto la sua orizzontale s-esima.

V_l [1]. Poichè dalla varietà di Picard relativa a V_l o, ciò che è lo stesso, a V_k, si passa a V_l con una trasformazione razionale, e da V_l si risale a V_k con un'altra sostituzione razionale, così si conclude che:

Il teorema precedente cade in difetto allora e solo allora che, essendo $q < k$, V_k *è una trasformata razionale della propria varietà di Picard.*

Questo caso d'eccezione può presentarsi effettivamente: basta p. es. considerare la varietà V_k delle coppie di punti di una varietà di Picard, semplice o multipla, V_l, e di uno spazio lineare S_{k-l}.

Chimica. — *Ricerche sopra gli eteri N-fenilici delle ossime* [2]. Nota del Corrispondente A. Angeli, L. Alessandri e M. Aiazzi-Mancini.

Gli eteri N-alchilici delle ossime, come è noto, vengono per lo più preparati facendo agire, nelle opportune condizioni, gli ioduri alcoolici sulle ossime, ovvero per condensazione delle aldeidi con le idrossilammine sostituite; generalmente si attribuisce loro la forma:

$$\begin{array}{c} R.CH - N.R \\ \diagdown O \diagup \end{array}$$

la quale venne stabilita solamente in analogia al processo di condensazione che si compie fra i nitrosoderivati e le idrossilammine [3], e non già in base alle trasformazioni che queste sostanze possono subire.

Come venne posto in rilievo due anni or sono [4], questa formula, che ricorderebbe quella degli ossidi

$$\begin{array}{c} R.CH - CH.R \\ \diagdown O \diagup \end{array}$$

(che sono stabili al permanganato, al pari delle basi di Schiff), *non spiega la instabilità di queste sostanze rispetto al permanganato* (Reazione di Baeyer), e non è in accordo col fatto che *in tutte le trasformazioni più blande e più nette che posson subire questi eteri, mai si è verificato che l'atomo di ossigeno comparisca unito al carbonio, ma sempre all'azoto*; in realtà si dovrebbe attendere precisamente il contrario.

[1] Castelnuovo, *Sugli integrali semplici appartenenti ad una superficie irregolare* (Questi Rendiconti, 1905), n. 4.

[2] Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Farmaceutica del R. Istituto di Studî Superiori di Firenze.

[3] Berliner Berichte, XXVII, 1556.

[4] Questi Rendiconti (1909), 2° sem., pag. 40.