ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVIII.

1911

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XX.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1911

Come il composto omologo p. f. 214°, essa è stabile al permanganato, ma non così all'azione dell'ioduro di magnesio-etile: si arriva, in tal caso, ad un olio gialio-arancio, molto solubile negli ordinarî solventi e che non accenna a cristallizzare.

Scissione con acido cromico di quest'ultima sostanza. — Un grammo di prodotto, disciolto in acido acetico, vien trattato con gr. 0,65 di acido cromico: si scalda alquanto a ricadere, e, quando la soluzione ha assunto una colorazione verde-scura, si distilla in corrente di vapore.

Una prima porzione del liquido che passa odora fortemente di aldeide benzoica: per identificarla, ne preparammo un derivato ben noto e caratteristico, la azina, e ne potemmo ottenere in quantità da riconoscere tutti i suoi caratteri.

Nell'altra porzione di liquido distillato si nota odore di benzofenone; si raccolsero infatti dei cristalli incolori col p. f. 45° e che, trattati con idrossilammina, dettero l'ossima caratteristica del benzofenone col p. f. 141°. Otteniamo dunque due prodotti di scissione, aldeide benzoica e benzofenone, in armonia con la costituzione assegnata al derivato.

Completeremo lo studio di queste interessanti reazioni.

Fisica matematica. — *Sulle vibrazioni luminose di un mezzo cristallino uniassico dovute alla presenza di un unico centro luminoso.* Nota di A. Signorini, presentata dal Socio G. A. Maggi.

In questa Nota espongo brevemente alcuni risultati della mia tesi di Abilitazione [1] che permettono di risolvere in modo completo il problema della rappresentazione analitica delle vibrazioni di un mezzo cristallino uniassico dovute alla presenza di un unico centro luminoso. Come è noto, le formule date da Lamé [2] come soluzione di tale problema, anzi del problema analogo relativo al caso più generale dei mezzi cristallini biassici, per le singolarità delle funzioni che in esse compariscono, non corrispondono allo scopo pel quale sono state cercate [3].

Le equazioni differenziali fondamentali della teoria elastica della luce, in un mezzo cristallino uniassico non soggetto ad azioni perturbatrici esterne, quando si assuma come sistema coordinato un sistema cartesiano ortogonale (xyz) coll'asse z parallelo all'asse ottico del mezzo e si rappresentino con

(1) *Sulla teoria analitica dei fenomeni luminosi nei mezzi cristallini uniassici* (in corso di stampa negli Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa).

(2) *Leçons sur l'élasticité. 23e leçon.*

(3) V. Volterra, *Sur les vibrations lumineuses dans les milieux biréfringents. Introduction.* Acta Math. Bd. XVI.

$\frac{1}{2a}, \frac{1}{2c}$ rispettivamente la lunghezza di un qualunque asse dell'ellissoide di elasticità relativo al mezzo considerato, parallelo al piano xy e la lunghezza dell'asse dello stesso ellissoide parallelo all'asse z, e si rappresentino con ξ, η, ζ le componenti dello spostamento elastico presente al tempo t nel punto (xyz), sono, come è noto, le seguenti:

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial z} - \dfrac{\partial\zeta}{\partial x}\right) - c^2 \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial x} - \dfrac{\partial\xi}{\partial y}\right) \\ \dfrac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial x} - \dfrac{\partial\xi}{\partial y}\right) - a^2 \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial y} - \dfrac{\partial\eta}{\partial z}\right) \qquad \dfrac{\partial\xi}{\partial x} + \dfrac{\partial\eta}{\partial y} + \dfrac{\partial\zeta}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial\zeta}{\partial y} - \dfrac{\partial\eta}{\partial z}\right) - a^2 \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial z} - \dfrac{\partial\zeta}{\partial x}\right) \end{cases}$$

Un qualunque loro integrale ξ, η, ζ si può ottenere da un conveniente integrale φ, ψ del sistema

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = a^2\Delta_2\varphi - (a^2 - c^2)\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial x} - \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right) \\ \dfrac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = a^2\Delta_2\psi + (a^2 - c^2)\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial x} - \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right), \end{cases}$$

ponendo

$$\xi = \frac{\partial\varphi}{\partial z} \qquad \eta = \frac{\partial\psi}{\partial z} \qquad \zeta = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial y} \text{ [1]}.$$

Poniamo

$$(3)\quad \begin{cases} f_1[\alpha, \beta] = \dfrac{\alpha\left(t - \dfrac{r}{a}\right)}{4\pi a^2 r} - \dfrac{1}{4\pi a}\dfrac{\partial}{\partial y}\displaystyle\int_{t-\frac{\bar r}{a}}^{t-\frac{r}{a}} \left\{\alpha(\tau)\frac{\partial\chi}{\partial v} - \beta(\tau)\frac{\partial\chi}{\partial u}\right\} d\tau = \\ \qquad = \dfrac{\alpha\left(t - \dfrac{\bar r}{a}\right)}{4\pi c^2 \bar r} + \dfrac{1}{4\pi a}\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int_{t-\frac{\bar r}{a}}^{t-\frac{r}{a}} \left\{\alpha(\tau)\frac{\partial\chi}{\partial u} + \beta(\tau)\frac{\partial\chi}{\partial v}\right\} d\tau \\ f_2[\alpha, \beta] = \dfrac{\beta\left(t - \dfrac{r}{a}\right)}{4\pi a^2 r} + \dfrac{1}{4\pi a}\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int_{t-\frac{\bar r}{a}}^{t-\frac{r}{a}} \left\{\alpha(\tau)\frac{\partial\chi}{\partial v} - \beta(\tau)\frac{\partial\chi}{\partial u}\right\} d\tau = \\ \qquad = \dfrac{\beta\left(t - \dfrac{\bar r}{a}\right)}{4\pi c^2 \bar r} + \dfrac{1}{4\pi a}\dfrac{\partial}{\partial y}\displaystyle\int_{t-\frac{\bar r}{a}}^{t-\frac{r}{a}} \left\{\alpha(\tau)\frac{\partial\chi}{\partial u} + \beta(\tau)\frac{\partial\chi}{\partial v}\right\} d\tau \end{cases}$$

[1] V. Volterra, Mem. cit., Art. 8, 1.

ove

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\quad,\quad \bar{r}=\sqrt{(x^2+y^2)\frac{a^2}{c^2}+z^2}\quad,\quad \chi=\log\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

e $\alpha(\tau)\,\beta(\tau)$ sono due funzioni arbitrarie del loro argomento che nel seguito supporremo nulle per tutti i valori di τ inferiori algebricamente ad un valore fissato. Allora le formule

$$\varphi=f_1[\alpha\,,\beta]\quad,\quad \psi=f_2[\alpha\,,\beta]\ \text{[1]} \tag{4}$$

almeno se le funzioni $\alpha\,,\beta$ sono finite e continue insieme alle loro derivate $1^e\ 2^e \ldots n^e\ (n\geq 3)$, ci daranno il più generale integrale del sistema (2) regolare per qualunque valore del tempo insieme alle sue derivate $1^e\ 2^e \ldots (n-1)^e$ in tutto lo spazio fuorchè nel punto $x=y=z=0$. Infatti essendo identicamente

$$\left\{\begin{aligned}
f_1[\alpha\,,\beta]=&\frac{1}{4\pi a^2}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\int_{-\infty}^{z}\frac{x}{x^2+y^2}\,\alpha\left(t-\frac{1}{a}\sqrt{x^2+y^2+z'^2}\right)\frac{z'\,dz'}{\sqrt{x^2+y^2+z'^2}}\right\}+\\
&+\frac{1}{4\pi a^2}\frac{\partial}{\partial y}\left\{\int_{-\infty}^{z}\frac{x}{x^2+y^2}\,\beta\left(t-\frac{1}{a}\sqrt{x^2+y^2+z'^2}\right)\frac{z'\,dz'}{\sqrt{x^2+y^2+z'^2}}\right\}-\\
&-\frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{y}{x^2+y^2}\int_{-\infty}^{t-\frac{\bar{r}}{a}}\alpha(\tau)\,d\tau\right\}+\frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{y}{x^2+y^2}\int_{-\infty}^{t-\frac{\bar{r}}{a}}\beta(\tau)\,d\tau\right\}\\
f_2[\alpha\,,\beta]=&\frac{1}{4\pi a^2}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\int_{-\infty}^{z}\frac{y}{x^2+y^2}\,\alpha\left(t-\frac{1}{a}\sqrt{x^2+y^2+z'^2}\right)\frac{z'\,dz'}{\sqrt{x^2+y^2+z'^2}}\right\}+\\
&+\frac{1}{4\pi a^2}\frac{\partial}{\partial y}\left\{\int_{-\infty}^{z}\frac{y}{x^2+y^2}\,\beta\left(t-\frac{1}{a}\sqrt{x^2+y^2+z'^2}\right)\frac{z'\,dz'}{\sqrt{x^2+y^2+z'^2}}\right\}+\\
&+\frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{x}{x^2+y^2}\int_{-\infty}^{t-\frac{\bar{r}}{a}}\alpha(\tau)\,d\tau\right\}-\frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{x}{x^2+y^2}\int_{-\infty}^{t-\frac{\bar{r}}{a}}\beta(\tau)\,d\tau\right\}
\end{aligned}\right.$$

[1] Questi integrali del sistema (2) — in una forma leggermente diversa che rende meno evidente la loro regolarità fuori del punto $x=y=z=0$ — furono ottenuti per la prima volta dal prof. Grünwald nella sua Memoria: *Ueber die Ausbreitung elastischer und elektromagnetischer Wellen in einaxig-krystallinischen Medien* (Sitzungsberichte der k. Ak. der W. in Wien; Math-naturw. Classe, Bd. CXI, Abth. II, a. april 1902) ricercando l'espressione dell'integrale generale $\varphi\,,\psi$ del sistema (2) per i valori che ad un istante iniziale fissato prendono le funzioni $\varphi\,,\psi$ e le loro derivate prime rispetto al tempo. Nella stessa Memoria Egli risolve la questione che forma il soggetto della presente Nota assumendo come espressioni delle componenti $\xi\,,\eta\,,\zeta$ degli spostamenti ela-

e le due terne di funzioni

$$\frac{1}{r}\frac{xz}{x^2+y^2}\alpha\left(t\pm\frac{r}{a}\right),\ \frac{1}{r}\frac{yz}{x^2+y^2}\alpha\left(t\pm\frac{r}{a}\right),\ -\frac{1}{r}\alpha\left(t\pm\frac{r}{a}\right);$$

$$-\frac{y}{x^2+y^2}\alpha\left(t\pm\frac{\overline{r}}{a}\right),\ \frac{x}{x^2+y^2}\alpha\left(t\pm\frac{\overline{r}}{a}\right),\ 0$$

dando due integrali del sistema (1) — integrali di Lamé — colla posizione fatta si ottiene certamente un integrale del sistema (2). E questo risulta il più generale che soddisfi alla condizione suddetta in base al teorema seguente, che estende agli integrali del sistema (2) un ben noto teorema di Kirchhoff relativo agli integrali dell'equazione $\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=a^2\Delta_2\varphi$:

Sia σ una superficie chiusa avvolgente un punto fissato (xyz), n la sua normale interna in un suo punto qualunque $(x'y'z')$. Dato un integrale φ,ψ del sistema (2), almeno se esso è finito e continuo insieme alle sue derivate prime e seconde nell'interno di σ per tutto un intervallo di tempo convenientemente esteso, avremo:

---

stici originati in un mezzo cristallino uniassico dalla presenza di un unico centro luminoso situato nel punto $x=y=z=0$:

$$\xi=f_1[\alpha,\beta]\ \ ,\ \ \eta=f_2[\alpha,\beta]\ \ ,\ \ \zeta=\frac{1}{4\pi a^2}\gamma\left(t-\frac{r}{a}\right),$$

ove γ, al pari di α e β, è una funzione arbitraria del suo argomento.

Ciò però non è legittimo perchè, anche disponendo della forma delle funzioni α,β,γ, non si ha mai per ogni valore di x,y,z se non è identicamente $\alpha=\beta=\gamma=0$:

$$\frac{\partial}{\partial x}f_1[\alpha,\beta]+\frac{\partial}{\partial y}f_2[\alpha,\beta]+\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{4\pi a^2}\gamma\left(t-\frac{r}{a}\right)=$$

$$=\frac{1}{4\pi a^2}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\frac{\alpha\left(t-\frac{r}{a}\right)}{r}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\beta\left(t-\frac{r}{a}\right)}{r}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\gamma\left(t-\frac{r}{a}\right)}{r}\right\}=0.$$

$$
(5)\quad \left\{
\begin{aligned}
\varphi(xyzt) = \int_\sigma d\sigma \Big\{ & a^2 \frac{d}{dn} f_1[\varphi(x'y'z't)\,,\,\psi(x'y'z't)] - \\
& - a^2 f_1\left[\frac{\partial}{\partial n}\varphi(x'y'z't)\,,\,\frac{\partial}{\partial n}\psi(x'y'z't)\right] - \\
& - (a^2 - c^2)\cos ny' \frac{d}{dy'} f_1[\varphi(x'y'z't)\,,\,0] + \\
& + (a^2 - c^2)\cos ny' f_1\left[\frac{\partial}{\partial y'}\varphi(x'y'z't)\,,\,0\right] - \\
& - (a^2 - c^2)\cos nx' \frac{d}{dx'} f_1[0\,,\,\psi(x'y'z't)] + \\
& + (a^2 - c^2)\cos nx' f_1\left[0\,,\,\frac{\partial}{\partial x'}\psi(x'y'z't)\right] + \\
& + (a^2 - c^2)\cos ny' \frac{d}{dx'} f_1[0\,,\,\varphi(x'y'z't)] - \\
& - (a^2 - c^2)\cos nx' f_1\left[0\,,\,\frac{\partial}{\partial y'}\varphi(x'y'z't)\right] + \\
& + (a^2 - c^2)\cos nx' \frac{d}{dy'} f_1[\psi(x'y'z't)\,,\,0] - \\
& - (a^2 - c^2)\cos ny' f_1\left[\frac{\partial\psi}{\partial x'}(x'y'z't)\,,\,0\right]; \\
\psi(xyzt) = \int_\sigma d\sigma \Big\{ & a^2 \frac{d}{dn} f_2[\varphi(x'y'z't)\,,\,\psi(x'y'z't)] - \\
& - a^2 f_2\left[\frac{\partial}{\partial n}\varphi(x'y'z't)\,,\,\frac{\partial}{\partial n}\psi(x'y'z't)\right] - \\
& - (a^2 - c^2)\cos ny' \frac{d}{dy'} f_2[\varphi(x'y'z't)\,,\,0] + \\
& + (a^2 - c^2)\cos ny' f_2\left[\frac{\partial}{\partial y'}\varphi(x'y'z't)\,,\,0\right] - \\
& - (a^2 - c^2)\cos nx' \frac{d}{dx'} f_2[0\,,\,\psi(x'y'z't)] + \\
& + (a^2 - c^2)\cos nx' f_2\left[0\,,\,\frac{\partial}{\partial x'}\psi(x'y'z't)\right] + \\
& + (a^2 - c^2)\cos ny' \frac{d}{dx'} f_2[0\,,\,\varphi(x'y'z't)] - \\
& - (a^2 - c^2)\cos nx' f_2\left[0\,,\,\frac{\partial}{\partial y'}\varphi(x'y'z't)\right] + \\
& + (a^2 - c^2)\cos nx' \frac{d}{dy'} f_2[\psi(x'y'z't)\,,\,0] - \\
& - (a^2 - c^2)\cos ny' f_2\left[\frac{\partial\psi}{\partial x'}(x'y'z't)\,,\,0\right],
\end{aligned}
\right.
$$

ove

$$\frac{\partial}{\partial n}=\frac{\partial}{\partial x'}\cos nx'+\frac{\partial}{\partial y'}\cos ny'+\frac{\partial}{\partial z'}\cos nz'$$

e le $\frac{d}{dx'}, \frac{d}{dy'}, \frac{d}{dz'}, \frac{d}{dn}=\frac{d}{dx'}\cos nx'+\frac{d}{dy'}\cos ny'+\frac{d}{dz'}\cos nz'$, sono da intendere eseguite senza tener conto della dipendenza delle φ, ψ dalle variabili $x'y'z'$ [1].

La più semplice soluzione del sistema (1) atta a rappresentare le vibrazioni luminose di un mezzo cristallino uniassico dovute alla presenza di un unico centro luminoso situato nel punto $x=y=z=0$ (e tale che non sia identicamente $\zeta=0$) [2] si otterrà dunque ponendo

$$\xi=\frac{\partial}{\partial z}f_1[\alpha,\beta]\ ,\ \eta=\frac{\partial}{\partial z}f_2[\alpha,\beta]\ ,\ \zeta=-\frac{\partial}{\partial x}f_1[\alpha,\beta]-\frac{\partial}{\partial y}f_2[\alpha,\beta].$$

Tenendo conto delle espressioni effettive (3) di $f_1[\alpha,\beta]$ e $f_2[\alpha,\beta]$, essa si può porre nella forma seguente:

$$\begin{aligned}(6)\qquad &\xi=\xi^{(0)}+\xi^{(\overline{0})}+\xi^{(s)}+\xi^{(\overline{s})}\ ,\quad \eta=\eta^{(0)}+\eta^{(\overline{0})}+\eta^{(s)}+\eta^{(\overline{s})}\ ,\\ &\zeta=\zeta^{(0)}+\zeta^{(\overline{0})}+\zeta^{(s)}+\zeta^{(\overline{s})}\end{aligned}$$

[1] Sono pervenuto alle formule (5) con un metodo analogo a quello tenuto da Kirchhoff (V. Kirchhoff, *Zur Theorie der Lichtsstrahlen*, Sitzungsberichte der k. Akademie der W. in Berlin, 1882) basandomi sulla conoscenza degli integrali (4) del sistema (2). Ma nella mia tesi d'Abilitazione ho riportato anche un'altra dimostrazione che delle stesse formule ha dato il prof. Grünwald e che, quantunque non sia stata ancora resa nota per mezzo della stampa, pure molto gentilmente mi è stata da Lui comunicata, quando ero già in possesso delle formule in questione.

[2] In tal caso le funzioni ξ, η ci dànno un integrale φ, ψ del sistema (2) pel quale $\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}=0$, e si ottengono necessariamente da una conveniente soluzione dell'equazione $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+c^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+a^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ ponendo $\xi=-\frac{\partial f}{\partial y}, \eta=\frac{\partial f}{\partial x}$. Fra le soluzioni del sistema (1) per le quali è identicamente $\zeta=0$ e che sono regolari in tutto lo spazio fuorchè nel punto $x=y=z=0$, la più semplice è data da

$$\xi=-\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{r}\alpha\left(t\pm\frac{\overline{r}}{a}\right)\qquad \eta=\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r}\alpha\left(t\pm\frac{\overline{r}}{a}\right)\qquad \zeta=0.$$

ove:

$$\left\{\begin{aligned}
\xi^{(0)} &= -\frac{xz}{a^3 r^2}\left\{\frac{\alpha x+\beta y}{x^2+y^2}\right\}_{t-\frac{r}{a}}\\
\eta^{(0)} &= -\frac{yz}{a^3 r^2}\left\{\frac{\alpha x+\beta y}{x^2+y^2}\right\}_{t-\frac{r}{a}}\\
\zeta^{(0)} &= \frac{x^2+y^2}{a^3 r^2}\left\{\frac{\alpha x+\beta y}{x^2+y^2}\right\}_{t-\frac{r}{a}}
\end{aligned}\right.
\qquad
\left\{\begin{aligned}
\xi^{(\overline{0})} &= \frac{1}{a^2}\int_{-\infty}^{t-\frac{r}{a}}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{z}{r}\,\frac{\alpha x+\beta y}{x^2+y^2}\right\}_\tau d\tau\\
\eta^{(\overline{0})} &= \frac{1}{a^2}\int_{-\infty}^{t-\frac{r}{a}}\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{z}{r}\,\frac{\alpha x+\beta y}{x^2+y^2}\right\}_\tau d\tau\\
\zeta^{(\overline{0})} &= \frac{1}{a^2}\int_{-\infty}^{t-\frac{r}{a}}\frac{x^2+y^2}{r^3}\left\{\frac{\alpha x+\beta y}{x^2+y^2}\right\}_\tau d\tau
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
\xi^{(s)} &= -\frac{yz}{ac^2\,\overline{r}^2}\left\{\frac{\alpha y-\beta x}{x^2+y^2}\right\}_{t-\frac{\overline{r}}{a}}\\
\eta^{(s)} &= \frac{xz}{ac^2\,\overline{r}^2}\left\{\frac{\alpha y-\beta x}{x^2+y^2}\right\}_{t-\frac{\overline{r}}{a}}\\
\zeta^{(s)} &= 0
\end{aligned}\right.
\qquad
\left\{\begin{aligned}
\xi^{(\overline{s})} &= \frac{1}{a^2}\int_{-\infty}^{t-\frac{\overline{r}}{a}}\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{z}{\overline{r}}\,\frac{\alpha y-\beta x}{x^2-y^2}\right\}_\tau d\tau\\
\eta^{(\overline{s})} &= -\frac{1}{a^2}\int_{-\infty}^{t-\frac{\overline{r}}{a}}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{z}{\overline{r}}\,\frac{\alpha y-\beta x}{x^2+y^2}\right\}_\tau d\tau\\
\zeta^{(\overline{s})} &= 0\,.
\end{aligned}\right.$$

Secondo queste formule il movimento elastico originato in un mezzo cristallino uniassico dalla presenza di un unico centro luminoso situato nel punto $x=y=z=0$, sarà da considerare come risultante dalla composizione di quattro movimenti pei quali, ad un istante qualunque, lo sposta mento del punto (xyz) è rappresentato rispettivamente dai quattro vettori

$$\left(\xi^{(0)},\eta^{(0)},\zeta^{(0)}\right)\ \left(\xi^{(\overline{0})},\eta^{(\overline{0})},\zeta^{(\overline{0})}\right)\ \left(\xi^{(s)},\eta^{(s)},\zeta^{(s)}\right)\ \left(\xi^{(\overline{s})},\eta^{(\overline{s})},\zeta^{(\overline{s})}\right).$$

Evidentemente nessuno di questi quattro movimenti, e neppure l'uno o l'altro dei due movimenti corrispondenti agli spostamenti

$$\left(\xi^{(0)}+\xi^{(\overline{0})},\eta^{(0)}+\eta^{(\overline{0})},\zeta^{(0)}+\zeta^{(\overline{0})}\right)\ \left(\xi^{(s)}+\xi^{(\overline{s})},\eta^{(s)}+\eta^{(\overline{s})},\zeta^{(s)}+\zeta^{(\overline{s})}\right),$$

può avere un'esistenza fisica a sè.

Il movimento corrispondente al vettore $\left(\xi^{(0)},\eta^{(0)},\zeta^{(0)}\right)$ si propaga dal centro luminoso per onde sferiche e il movimento corrispondente al vettore $\left(\xi^{(s)},\eta^{(s)},\zeta^{(s)}\right)$ per onde ellissoidiche $\overline{r}=\text{cost}$. Le direzioni degli spostamenti competenti in questi due movimenti a un punto qualunque dello spazio non variano al variar del tempo, e coincidono colle direzioni dei due diametri principali dell'ellisse sezione dell'ellisse di elasticità relativo al punto sede del centro luminoso col piano condotto per tal punto normalmente alla retta che lo unisce al punto del mezzo per cui ci riferiamo.

Al contrario le direzioni dei due vettori

$$\left(\bar{\xi}^{(0)}, \bar{\eta}^{(0)}, \bar{\zeta}^{(0)}\right) \text{ e } \left(\bar{\xi}^{(s)}, \bar{\eta}^{(s)}, \bar{\zeta}^{(s)}\right)$$

variano col tempo e i movimenti corrispondenti non sono ondulatorî. I valori delle due funzioni α, β ad un certo istante τ non contribuiscono ad un qualunque istante successivo t soltanto alla formazione dei valori delle funzioni $\bar{\xi}^{(0)}, \bar{\eta}^{(0)}, \bar{\zeta}^{(0)}$ e $\bar{\xi}^{(s)}, \bar{\eta}^{(s)}, \bar{\zeta}^{(s)}$, relativi ai punti di una superficie, ma contribuiscono invece alla formazione dei valori di tali funzioni relativi a tutti quanti i punti rispettivamente interni alla sfera $r = a(t-\tau)$ e all'elissoide $\bar{r} = a(t-\tau)$, cioè a tutti quanti i punti nei quali precedentemente all'istante t i valori delle funzioni α, β all'istante τ hanno avuto parte nella formazione delle funzioni $\xi^{(0)}, \eta^{(0)}, \zeta^{(0)}$ e $\xi^{(s)}, \eta^{(s)}, \zeta^{(s)}$.

Ciò si può interpretare dicendo che le singole onde dalle quali risultano i due movimenti corrispondenti al vettore $\left(\xi^{(0)}, \eta^{(0)}, \zeta^{(0)}\right)$ e al vettore $\left(\xi^{(s)}, \eta^{(s)}, \zeta^{(s)}\right)$ suscitano in tutto lo spazio da esse attraversato delle vibrazioni perenni che combinate tra di loro dànno appunto origine ai due movimenti corrispondenti al vettore $\left(\bar{\xi}^{(0)}, \bar{\eta}^{(0)}, \bar{\zeta}^{(0)}\right)$ e al vettore $\left(\bar{\xi}^{(s)}, \bar{\eta}^{(s)}, \bar{\zeta}^{(s)}\right)$.

Ciò non è in contradizione coi risultati sperimentali, perchè, se le due funzioni α, β sono periodiche con un periodo molto breve, i due vettori $\left(\bar{\xi}^{(0)}, \bar{\eta}^{(0)}, \bar{\zeta}^{(0)}\right)$ e $\left(\bar{\xi}^{(s)}, \bar{\eta}^{(s)}, \bar{\zeta}^{(s)}\right)$ risultano sempre trascurabili rispetto ai vettori $\left(\xi^{(0)}, \eta^{(0)}, \zeta^{(0)}\right)$ $\left(\xi^{(s)}, \eta^{(s)}, \zeta^{(s)}\right)$, e lo stesso accade, qualunque sia la forma delle funzioni α, β, nel caso di un centro luminoso a distanza grandissima, nel qual caso le formule (6) si riducono a quelle che necessariamente rappresentano gli spostamenti elastici presenti nei singoli punti di un mezzo uniassico quando si ammette *a priori* che il mezzo stesso debba risultare sede di una propagazione di onde piane.

Quanto ora abbiamo detto rende ragione anche del fatto che gli integrali di Lamé non risultano adatti a rappresentare il movimento elastico originato in un mezzo cristallino dalla presenza di un'unica sorgente luminosa di dimensioni piccolissime. Infatti tali integrali furono ottenuti in base al concetto che un tal movimento dovesse risultare da una successione di onde sferiche e di onde ellissoidiche $\bar{r} =$ cost, propagantisi nel mezzo, le une *indipendentemente* dalle altre, senza lasciar traccia del loro passaggio.