ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVIII.

1911

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1911

Matematica. — *Sulle funzioni permutabili di seconda specie.* Nota di LUIGI SINIGALLIA, presentata dal Corrisp. G. LAURICELLA.

1. Il prof. Volterra [1] chiama *funzioni permutabili di seconda specie* due funzioni $F(x, y)$, $K(x, y)$ finite e continue, le quali soddisfano alla relazione:

$$(1) \qquad \int_a^b F(x, s)\, K(s, y)\, ds = \int_a^b K(x, s)\, F(s, y)\, ds = g(x, y).$$

Scopo di questa Nota è di mostrare come introducendo le funzioni ortogonali di Schmidt, possano determinarsi le funzioni $K(x, y)$ permutabili di seconda specie con una data funzione $F(x, y)$, che sia uguale alla somma di un numero finito di prodotti di una funzione della sola x per un'altra funzione della sola y.

Poichè qui ci occuperemo della sola permutabilità di seconda specie, diremo brevemente che tutte le funzioni $K(x, y)$ che soddisfano alla (1) sono permutabili colla $F(x, y)$.

Supponiamo poi che la funzione data sia espressa mediante il corrispondente sistema ortogonale completo $\varphi_r(x)$, $\psi_r(y)$, ossia supponiamo che sia:

$$(2) \qquad F(x, y) = \sum_{r=1}^{n} \frac{\varphi_r(x)\, \psi_r(y)}{\lambda_r};$$

ove:

$$\int_a^b \varphi_i(x)\, \varphi_h(x)\, dx = \begin{cases} 1 & \text{se } i = h \\ 0 & \text{se } i \neq h \end{cases}; \quad \int_a^b \psi_i(y)\, \psi_h(y)\, dy = \begin{cases} 1 & \text{se } i = h \\ 0 & \text{se } i \neq h \end{cases}.$$

Notiamo anzitutto che se

$$(3) \qquad \int_a^b F(x, s)\, K(s, y)\, ds = g(x, y),$$

la $g(x, y)$ dovrà soddisfare alla relazione

$$(4) \qquad g(x, y) = \sum_{r=1}^{n} \varphi_r(x) \int_a^b \varphi_r(s)\, g(s, y)\, ds,$$

[1] Volterra, *Sopra le funzioni permutabili.* Rendiconti R. Accad. Lincei, serie 5ª, vol. XIX, 1° semestre 1910.

e se $K_1(x, y)$ è una soluzione della (3), la soluzione generale della (3) è data da [1]

$$K(x, y) = K_1(x, y) + \theta(x, y),$$

essendo $\theta(x, y)$ la soluzione generale dell'equazione

$$\int_a^b F(x, y)\, \theta(s, y)\, ds = 0 \tag{5}$$

e quindi

$$\theta(x, y) = \omega(x, y) - \sum_{r=1}^{n} \psi_r(x) \int_a^b \psi_r(s)\, \omega(s, y)\, ds, \tag{6}$$

essendo la $\omega(x, y)$ una funzione arbitraria integrabile.

Parimenti se

$$\int_a^b K(x, y)\, F(s, y)\, ds = g(x, y) \tag{7}$$

sarà

$$g(x, y) = \sum_{r=1}^{n} \psi_r(y) \int_a^b g(x, t)\, \psi_r(t)\, dt \tag{8}$$

e se $K_2(x, y)$ è soluzione della (7), la soluzione generale della (7) stessa è

$$K(x, y) = K_2(x, y) + \xi(x, y),$$

essendo $\xi(x, y)$ la soluzione generale dell'equazione

$$\int_a^b \xi(x, s)\, F(s, y)\, ds = 0, \tag{9}$$

e quindi

$$\xi(x, y) = \varrho(x, y) - \sum_{r=1}^{n} \varphi_r(y) \int_a^b \varrho(x, t)\, \varphi_r(t)\, dt, \tag{10}$$

essendo $\varrho(x, y)$ una funzione arbitraria integrabile.

Intanto dalle (4), (8) si ha

$$g(x, y) = \sum_{i,h=1}^{n} \varphi_i(x)\, \psi_h(y) \int_a^b \varphi_i(s)\, ds \int_a^b g(s, t)\, \psi_h(t)\, dt,$$

ossia

$$g(x, y) = \sum_{i,h=1}^{n} a_{i.h}\, \varphi_i(x)\, \psi_h(y). \tag{11}$$

[1] Lauricella, *Sopra alcune equazioni integrali*. Rendic. R. Accad. Lincei, ser. 5ª, vol. XVII, 1° semestre 1908.

essendo $a_{i,h}$ delle costanti. Per determinarle rammentiamo [1] che la $g(x,y)$ definita dalla (11) deve essere una funzione permutabile colla $F(x,y)$, cioè sarà

$$\int_a^b F(x,s)\, g(s,y)\, ds = \int_a^b g(x,s)\, F(s,y)\, ds\,;$$

quindi se poniamo

$$A_{i,h} = \int_a^b \varphi_i(s)\, \psi_h(s)\, ds$$

dovrà aversi

$$\sum_{i,h=1}^{n} \left\{ \frac{1}{\lambda_h} \sum_{r=1}^{n} A_{h,r}\, a_{i,r} - \frac{1}{\lambda_i} \sum_{r=1}^{n} A_{r,i}\, a_{r,h} \right\} \varphi_i(x)\, \psi_h(y) = 0\,:$$

e poichè le $\varphi_i(x)$ sono fra loro linearmente indipendenti e così pure lo sono le $\psi_h(y)$, le n^2 costanti $a_{i,h}$ dovranno soddisfare alle n^2 relazioni

$$\lambda_i \sum_{r=1}^{n} A_{h,r}\, a_{i,r} - \lambda_h \sum_{r=1}^{n} A_{r,i}\, a_{r,h} = 0\,, \quad (i\,,h = 1\,,2\,,\dots n) \tag{12}$$

Posto ciò preso un sistema di valori $a_{i,h}$ che soddisfano alle (12) cerchiamo la soluzione più generale dell'equazione

$$\int_a^b F(x,s)\, K(s,y)\, ds = \sum_{i,h=1}^{n} a_{i,h}\, \varphi_i(x)\, \psi_h(y)\,: \tag{13}$$

A tale scopo cerchiamo di determinare le costanti $b_{i,h}$ in modo che la funzione

$$K_1(x,y) = \sum_{i,h=1}^{n} b_{i,h}\, \varphi_i(x)\, \psi_h(y) \tag{14}$$

sia una soluzione della (13). In tal caso dalla (13), ponendovi per $K(x,y)$ la $K_1(x,y)$ data dall'espressione precedente, si ha

$$\sum_{i,h=1}^{n} \left\{ \frac{1}{\lambda_i} \sum_{r=1}^{n} A_{ri}\, b_{r,h} - a_{i,h} \right\} \varphi_i(x)\, \psi_h(y) = 0$$

e quindi le $b_{i,h}$ soddisferanno alle relazioni

$$\sum_{r=1}^{n} A_{r,i}\, b_{r,h} = \lambda_i\, a_{i,h} \qquad (i\,,h = 1\,,2\,,\dots n)\,. \tag{15}$$

[1] Volterra, *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro differenziali.* Rendic. R. Accad. Lincei, ser. 5ª, vol. XIX, 1° semestre 1910.

Ora si vede facilmente che se

$$D = \begin{vmatrix} A_{11} \dots A_{1n} \\ \dots\dots \\ A_{n1} \dots A_{nn} \end{vmatrix},$$

il determinante del sistema (15) è D^n, e se denotiamo con $P_{i,h}$ il complemento algebrico di $A_{i,h}$ nel determinante D (che supponiamo diverso da zero) deduciamo dalle (15)

$$(16) \qquad b_{i,h} = \frac{1}{D} \sum_{r=1}^{n} \lambda_r P_{i,r} a_{r,h} \qquad (i, h = 1, \dots n).$$

La soluzione generale della (13), quando le costanti $a_{i,h}$ soddisfano alle (12) è dunque

$$(17) \qquad K(x, y) = \sum_{i,h=1}^{n} b_{i,h} \varphi_i(x) \psi_h(y) + \theta(x, y);$$

ove $\theta(x, y)$ è la soluzione generale della (15) ed è quindi data dalla (6); le costanti $b_{i,h}$ sono poi date dalle (16).

Osserviamo poi che per la (14)

$$\int_a^b K_1(x, s) F(s, y) ds = \sum_{i,r,h=1}^{n} \frac{1}{\lambda_h} A_{hr} b_{i,r} \varphi_i(x) \psi_h(y);$$

ma per le (16)

$$\frac{1}{\lambda_h} \sum_{r=1}^{n} A_{hr} b_{i,r} = \frac{1}{D\lambda_h} \sum_{s=1}^{n} \lambda_s P_{i,s} \sum_{r=1}^{n} A_{hr} a_{sr},$$

e per le (12)

$$(18) \qquad \frac{1}{\lambda_h} \sum_{r=1}^{n} A_{hr} b_{i,r} = \frac{1}{D} \sum_{r,s=1}^{n} P_{i,s} A_{r,s} a_{r,h} = a_{i,h}.$$

Quindi si ha

$$\int_a^b K_1(x, s) F(s, y) ds = \sum_{i,h=1}^{n} a_{i,h} \varphi_i(x) \psi_h(y),$$

e la funzione $K_1(x, y)$ definita dalla (14) ed i cui coefficienti sono dati dalle (16) è una funzione permutabile colla $F(x, y)$.

Dunque perchè la $K(x, y)$ definita dalla (17) sia permutabile colla $F(x, y)$ bisogna che $\theta(x, y)$ sia una funzione permutabile colla $F(x, y)$ stessa. Ma la $\theta(x, y)$ è la soluzione generale della (5), dunque essa dovrà pure soddisfare alla (9); sarà cioè la soluzione generale comune alle (5), (9).

Concludiamo così che la funzione più generale permutabile colla nostra $F(x, y)$ è data da

$$(19) \quad K(x, y) = \sum_{i,h=1}^{n} b_{i,h}\, \varphi_i(x)\, \psi_h(y) + \alpha(x, y) -$$
$$- \sum_{r=1}^{n} \varphi_r(y) \int_a^b \alpha(x, t)\, \varphi_r(t)\, dt - \sum_{r=1}^{n} \psi_r(x) \int_a^b \psi_r(s)\, \alpha(s, y)\, ds +$$
$$+ \sum_{i,h=1}^{n} \varphi_i(y)\, \psi_h(x) \int_a^b \psi_h(s)\, ds \int_a^b \alpha(s, t)\, \varphi_i(t)\, dt,$$

essendo $\alpha(x, y)$ una funzione arbitraria integrabile e le $b_{i,h}$ costanti determinate dalle (16).

Dalle relazioni precedenti possiamo anche facilmente trovare le relazioni cui soddisfanno le costanti $b_{i,h}$; infatti dalle (15), (18) si deduce subito

$$(20) \qquad \lambda_i \sum_{r=1}^{n} A_{hr}\, b_{i,r} - \lambda_h \sum_{r=1}^{n} A_{r,i}\, b_{r,h} = 0 \quad (i, h = 1, \dots n),$$

cioè le $b_{i,h}$ soddisfanno alle stesse equazioni cui soddisfanno le $a_{i,h}$.

In particolare se $F(x, y)$ è una costante, poichè allora

$$\varphi(x) = \psi(y) = \frac{1}{\sqrt{b-a}},$$

la funzione più generale permutabile con una costante sarà

$$K(x, y) = \alpha(x, y) - \frac{1}{b-a} \left\{ \int_a^b \alpha(x, t)\, dt + \int_a^b \alpha(s\ y)\, ds \right\} + c,$$

essendo c una costante arbitraria.

2. Per risolvere completamente il nostro problema dobbiamo ora occuparci delle determinazioni delle costanti $a_{i,h}$, oppure delle b_{ik}.

Se poniamo

$$\Gamma_i \equiv \sum_{r=1}^{n} (A_{i,r}\, a_{i,r} - A_{ri}\, a_{ri})$$

$$\Delta_{i,h} \equiv \lambda_i \sum_{r=1}^{n} A_{hr}\, a_{ir} - \lambda_h \sum_{r=1}^{n} A_{ri}\, a_{r,h} \qquad (i \neq h),$$

il sistema (12) consta delle n equazioni $\Gamma_i = 0$ e delle $n(n-1)$ equazioni $\Delta_{i,h} = 0$. Tali equazioni però non sono linearmente indipendenti perchè se

le $A_{i,h}$ con $i \neq h$ non sono nulle, fra le $\Delta_{i,h}$, Γ_i sussistono queste n relazioni

$$\sum_{i=1}^{n} \Gamma_i = 0$$

$$\sum_{i,h=1}^{n} \frac{\Delta_{i,h}}{\lambda_i \lambda_h} \sum_{r \neq i,h} \frac{1}{\lambda_{r_1} \dots \lambda_{r_{s-1}}} \begin{vmatrix} A_{i,h} & A_{i,r_1} & \dots & A_{i r_{s-1}} \\ A_{r_1,h} & A_{r_1 r_1} & \dots & A_{r_1 r_{s-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{r_{s-1} h} & A_{r_{s-1} r_1} & \dots & A_{r_{s-1} r_{s-1}} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \Gamma_i \sum_{r \neq i} \frac{1}{\lambda_{r_1} \dots \lambda_{r_s}} \begin{vmatrix} A_{r_1 r_1} & \dots & A_{r_1 r_s} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{r_s r_1} & \dots & A_{r_s r_s} \end{vmatrix}$$

$$(s = 1, 2, \dots n - 1),$$

ove $\sum_{i,h=1}^{n}$ intendesi esteso a tutte le $n(n-1)$ disposizioni semplici della classe seconda degli indici $1, 2, \dots n$; il $\sum_{r \neq i,h}$ va esteso a tutte le $\binom{n-2}{s-1}$ combinazioni della classe $s-1$ degli indici $1, 2, \dots i-1, i+1, \dots h-1, h+1, \dots n$ ed il $\sum_{r \neq i}$ va esteso a tutte le $\binom{n-1}{s}$ combinazioni della classe s degli indici $1, 2, \dots i-1, i+1, \dots n$.

Perciò il grado di indeterminazione del sistema (12) [oppure del sistema (20)] è in generale n; e se poniamo

$$p_{i,h} = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda_i} & \text{se} \quad i = h \\ 0 & \text{se} \quad i \neq h; \end{cases}$$

la soluzione del sistema (20) quando $D \neq 0$ e le $A_{i,h}$ con $i \neq h$ non sono tutte nulle è data in generale da

$$b_{h,i} = p_{h,i}\, c_0 + \sum_{s=0}^{n-2} \frac{c_{s+1}}{\lambda_i \lambda_h} \sum_{r \neq i,h} \frac{1}{\lambda_{r_1} \dots \lambda_{r_s}} \begin{vmatrix} A_{i,h} & A_{i r_1} & \dots & A_{i r_s} \\ A_{r,h} & A_{r_1 r_1} & \dots & A_{r_1 r_s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{r_s h} & A_{r_1 r_1} & \dots & A_{r_s r_s} \end{vmatrix},$$

essendo le c delle costanti arbitrarie.

Ponendo tale valore delle $b_{i,h}$ nella (19) avremo la espressione della funzione richiesta.

Invece quando tutte le $A_{i,h}$ con $i \neq h$ sono nulle il sistema (12) diviene

$$(\lambda_i A_{hh} - \lambda_h A_{ii})\, a_{i,h} = 0 \qquad (i, h = 1 \dots n)$$

e da tale relazione segue che le $a_{i,h}$ relative agli indici i, h pei quali

$\lambda_i A_{hh} - \lambda_h A_{ii} = 0$ possono prendersi arbitrariamente, mentre le $a_{i,h}$ relative agli indici i, h pei quali $\lambda_i A_{hh} - \lambda_h A_{ii} \neq 0$ devono essere nulle.

Così se le λ_r sono tutte fra loro diverse, la funzione generale permutabile col nucleo $\sum_{r=1}^{n} \frac{\varphi_r(x)\,\varphi_r(y)}{\lambda_r}$ è data da

$$\sum_{r=1}^{n} a_r\,\varphi_r(x)\,\varphi_r(y) + \Phi(x, y),$$

essendo le a_r delle costanti arbitarie e $\Phi(x, y)$ la soluzione comune alle (5), (9). Invece se $\varphi_r(x)$, $(r = 1, 2, \ldots 2n)$ sono $2n$ funzioni ortogonali e si pone

$$\psi_r(x) = \varphi_{n+r}(x) \qquad (r = 1 \ldots n)$$

il nucleo $\sum_{r=1}^{n} \frac{\varphi_r(x)\,\psi_r(y)}{\lambda_r}$ è permutabile con la funzione

$$\sum_{i,h=1}^{n} a_{i,h}\,\varphi_i(x)\,\psi_h(y)$$

qualunque siano i valori delle costanti $a_{i,h}$.

Meccanica. — *Sull'efflusso dei liquidi fra pareti che presentano una interruzione.* Nota di GUSTAVO COLONNETTI, presentata dal Socio LEVI-CIVITA.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Rotazione nel campo magnetico di un disco di bismuto, riscaldato al centro o alla periferia.* Nota di O. M. CORBINO, presentata dal Socio P. BLASERNA.

1. Un disco di bismuto è sospeso tra le facce polari d'un elettromagnete, a 45° dalle linee di forza, per mezzo di un filo che compensa con la sua torsione la tendenza orientatrice dovuta al diamagnetismo del disco.

Inviando *nel centro* di questo un sottile fascio di luce, che lo riscaldi anche lievemente, si manifesta l'esistenza d'una energica coppia che tende ad annullare l'orientazione diamagnetica, e a disporlo perciò parallelamente alle linee di forza. L'azione non s'inverte invertendo il senso del campo; cambia invece di segno se del disco si scalda con un fascio di luce anulare, o altrimenti, la periferia. La coppia è massima a 45° dalle linee di forza e può allora raggiungere un valore rilevante così da superare la forte tendenza orientatrice dovuta al diamagnetismo, specialmente se il disco è un poco affumicato.