ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVIII.

1911

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1911

$\lambda_i \mathrm{A}_{hh} - \lambda_h \mathrm{A}_{ii} = 0$ possono prendersi arbitrariamente, mentre le $a_{i,h}$ relative agli indici i, h pei quali $\lambda_i \mathrm{A}_{hh} - \lambda_h \mathrm{A}_{ii} \neq 0$ devono essere nulle.

Così se le λ_r sono tutte fra loro diverse, la funzione generale permutabile col nucleo $\sum_{r=1}^{n} \frac{\varphi_r(x)\,\varphi_r(y)}{\lambda_r}$ è data da

$$\sum_{r=1}^{n} a_r\,\varphi_r(x)\,\varphi_r(y) + \Phi(x\,,y)\,,$$

essendo le a_r delle costanti arbitarie e $\Phi(x\,,y)$ la soluzione comune alle (5), (9). Invece se $\varphi_r(x)\,,\,(r=1\,,2\,,\ldots 2n)$ sono $2n$ funzioni ortogonali e si pone

$$\psi_r(x) = \varphi_{n+r}(x) \qquad (r=1 \ldots n)$$

il nucleo $\sum_{r=1}^{n} \frac{\varphi_r(x)\,\psi_r(y)}{\lambda_r}$ è permutabile con la funzione

$$\sum_{i,h=1}^{n} a_{i,h}\,\varphi_i(x)\,\psi_h(y)$$

qualunque siano i valori delle costanti $a_{i,h}$.

Meccanica. — *Sull'efflusso dei liquidi fra pareti che presentano una interruzione.* Nota di GUSTAVO COLONNETTI, presentata dal Socio LEVI-CIVITA.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Rotazione nel campo magnetico di un disco di bismuto, riscaldato al centro o alla periferia.* Nota di O. M. CORBINO, presentata dal Socio P. BLASERNA.

1. Un disco di bismuto è sospeso tra le facce polari d'un elettromagnete, a 45° dalle linee di forza, per mezzo di un filo che compensa con la sua torsione la tendenza orientatrice dovuta al diamagnetismo del disco.

Inviando *nel centro* di questo un sottile fascio di luce, che lo riscaldi anche lievemente, si manifesta l'esistenza d'una energica coppia che tende ad annullare l'orientazione diamagnetica, e a disporlo perciò parallelamente alle linee di forza. L'azione non s'inverte invertendo il senso del campo; cambia invece di segno se del disco si scalda con un fascio di luce anulare, o altrimenti, la periferia. La coppia è massima a 45° dalle linee di forza e può allora raggiungere un valore rilevante così da superare la forte tendenza orientatrice dovuta al diamagnetismo, specialmente se il disco è un poco affumicato.

2. La teoria elettronica dei metalli ci rende conto facilmente dell'effetto osservato.

Secondo il Drude [1] la conduzione del calore nei metalli avviene con un doppio meccanismo. Da un canto si produce nel metallo tra le parti calde e le fredde uno scambio continuo di ioni che ha per effetto di eguagliare le temperature convettivamente come nei gas, in modo cioè che un numero eguale di ioni traversa un piano qualsiasi nei due sensi. A questo trasporto di calore non è connessa perciò alcuna manifestazione elettrica.

Contemporaneamente avrebbe origine una differenza nella concentrazione degli ioni tra i punti in cui la temperatura è differente, poichè in quasi tutti i metalli il numero di ioni per centimetro cubo è funzione della temperatura.

Ne segue una vera migrazione di ioni in un senso determinato, e se il corpo è isolato, nascono in esso delle forze elettriche che modificano la ulteriore diffusione degli ioni. A questa migrazione sarebbero dovute le deviazioni dalla legge di Wiedemann e Franz e l'effetto Thomson; ad essa pure è dovuta la rotazione sopra riferita del disco di bismuto nel campo.

3. Supponiamo che il disco sia percorso, in un campo ad esso normale, da un flusso di calore centrifugo radiale. Dimostreremo che il disco deve equivalere a una particolare lamina magnetica con senso di circuitazione opposto a quello della corrente magnetizzante. Notiamo anzitutto che la distribuzione delle temperature, ed eventualmente del campo elettrico, nel disco continuerà per ragioni di simmetria a essere circolare. E perciò il gradiente di temperatura e la forza elettrica saranno in ogni punto radiali.

Al gradiente termico nel senso dr eguale a $\frac{dT}{dr}$, negativo, corrisponde per la teoria di Drude, un flusso centrifugo di ioni positivi con velocità $-t_1 \frac{dT}{dr}$, essendo

$$t_1 = p y_1 x_1 \tag{1}$$

nella quale p è una costante $y_1 = ev_1$ il prodotto della carica e dell'ione per la velocità che esso acquista sotto la forza 1, e x_1 la variazione relativa con la temperatura del numero N_1 di ioni per centimetro cubo:

$$x_1 = \frac{1}{N_1} \frac{dN_1}{dT} = \frac{d \log N_1}{dT} .$$

Consideriamo, in un punto del disco alla distanza r dal centro, la componente radiale $\frac{dr}{dt}$ e la componente circolare $r \frac{d\vartheta}{dt}$ della velocità e supponiamo che la corrente magnetizzante circoli nel senso di ϑ crescente.

[1] Drude, Ann. d. Physik, 1, pag. 566, 1900.

Ponendo

$$H e v_1 = m_1$$

avremo

(2)
$$r \frac{d\vartheta}{dt} = - m_1 \frac{dr}{dt} .$$

Detta E la forza elettrica radiale che prende origine per l'accumulo diseguale di ioni, e computandola positivamente nel senso centrifugo, sarà inoltre

(3)
$$\frac{dr}{dt} = y_1 \, E - t_1 \frac{dT}{dr} + m_1 r \frac{d\vartheta}{dt} .$$

La (2) ci dice che la traiettoria degli ioni è la stessa spirale

$$r = r_1 \, e^{-\frac{\vartheta}{m_1}}$$

già trovata per un flusso radiale *elettrico* (¹).

La (3), combinata con la (2) ci dà poi

$$(1 + m_1^2) \frac{dr}{dt} = y_1 \, E - t_1 \frac{dT}{dr} .$$

Trascurando, in prima approssimazione, m_1^2 di fronte alla unità, la densità della corrente radiale trasportata dagli ioni positivi sarà perciò

$$I_{1,r} = N_1 \, e \frac{dr}{dt} = N_1 \, e \left(y_1 \, E - t_1 \frac{dT}{dr} \right) .$$

Per gli ioni negativi si trova egualmente

$$I_{2,r} = - N_2 \, e \frac{dr}{dt} = N_2 \, e \left(y_2 \, E + t_2 \frac{dT}{dr} \right) .$$

Ma essendo il disco isolato, deve essere

(4)
$$I_{1,r} + I_{2,r} = 0$$

e perciò

$$N_1 \left(y_1 \, E - t_1 \frac{dT}{dr} \right) = - N_2 \left(y_2 \, E + t_2 \frac{dT}{dr} \right)$$

dalla quale si ricava il valore della forza elettrica:

(5)
$$E = \frac{N_1 t_1 - N_2 t_2}{N_1 y_1 + N_2 y_2} \frac{dT}{dr} .$$

(¹) Corbino, Rend. Lincei. t. XX, pag. 424, 1911.

Analogamente ponendo per gli ioni negativi

$$m_2 = \mathrm{H}\, e\, v_2$$

si ottiene per la densità delle correnti *circolari* trasportate dagli ioni positivi e negativi

$$\mathrm{I}_{1,c} = \mathrm{N}_1\, e\, r \frac{d\vartheta}{dt} = - m_1 \mathrm{I}_{1,r}$$

$$\mathrm{I}_{2,c} = - \mathrm{N}_2\, e\, r \frac{d\vartheta}{dt} = m_2 \mathrm{I}_{2,r}\,.$$

A questo flusso circolare di cariche corrisponderà un'azione magnetica equivalente a quella prodotta da una corrente complessiva i: e questa, per la (4) sarà data da

$$i = \mathrm{I}_{1,c} + \mathrm{I}_{2,c} = -(m_1 + m_2)\, \mathrm{I}_{1,r} = -(m_1 + m_2)\, \mathrm{N}_1\, e \left(y_1 \mathrm{E} - t_1 \frac{d\mathrm{T}}{dr} \right)$$

Tenendo presente la (5), e la (1) questa diviene

$$i = p\, e\, \mathrm{N}_1 y_1\, \mathrm{N}_2 y_2 \frac{x_1 + x_2}{\mathrm{N}_1 y_1 + \mathrm{N}_2 y_2} (y_1 + y_2)\, \mathrm{H} \frac{d\mathrm{T}}{dr}$$

o anche essendo

$$\sigma_1 = e\, \mathrm{N}_1\, y_1$$

e

$$\sigma_2 = e\, \mathrm{N}_2\, y_2$$

i contributi delle due specie di ioni alla conducibilità elettrica totale

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$$

si potrà scrivere

$$i = p \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma} (x_1 + x_2)(y_1 + y_2)\, \mathrm{H} \frac{d\mathrm{T}}{dr}\,. \tag{6}$$

Ma se si indica con Q la quantità totale di calore che fluisce nel disco, si avrà, computandola positivamente nel senso centrifugo,

$$\mathrm{Q} = - k \cdot 2\pi r \frac{d\mathrm{T}}{dr}\,,$$

ove con k è indicata la conducibilità termica della sostanza.

Sarà perciò

$$\frac{d\mathrm{T}}{dr} = - \frac{1}{k} \frac{\mathrm{Q}}{2\pi r}\,.$$

Sostituendo nella (6) avremo dunque

$$i = - p \frac{1}{2\pi r} \frac{\sigma_1 \sigma_2}{k\sigma} (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) \mathrm{QH}$$

e perciò, ponendo

$$\mathrm{U} = p \frac{\sigma_1 \sigma_2}{k\sigma} (x_1 + x_2)(y_1 + y_2), \tag{7}$$

il disco eserciterà un'azione elettromagnetica equivalente a quella di un sistema di correnti circolari di densità

$$i = - \frac{1}{2\pi r} \mathrm{UQH} \tag{8}$$

e l'azione stessa sarà, per date dimensioni del disco, proporzionale al coefficiente U caratteristico della sostanza, al flusso di calore Q e al campo H. Poichè $x_1 + x_2$, secondo la teoria, è una funzione comune a tutti i metalli, e da quanto è noto essa ha un valore positivo, e poichè le altre grandezze che compariscono nella espressione di U sono essenzialmente positive, ne risulta che i ha un senso opposto a quello di circuitazione della corrente magnetizzante.

4. Il disco per le sue proprietà elettromagnetiche, possiederà un'energia di posizione nel campo; per un anellino $2\pi r \,.\, dr$ essa è data da

$$d\mathrm{W} = \frac{1}{2\pi r} \mathrm{UQH}\, dr \times \pi r^2 \mathrm{H}\,.$$

L'energia totale sarà

$$\mathrm{W} = \frac{1}{2\pi} \mathrm{UQSH}^2,$$

ove S indica la superficie totale attiva del disco.

Ma se la normale al disco fa un angolo α con le linee di forza, la energia sarà

$$\mathrm{W}' = \mathrm{W} \cos^2\alpha\,.$$

Si eserciterà perciò sul disco una coppia di momento

$$\mathrm{M} = - \frac{d\mathrm{W}'}{d\alpha} = \mathrm{W} \operatorname{sen} 2\alpha$$

e per $\alpha = 45°$

$$\mathrm{M} = \frac{1}{2\pi} \mathrm{UQSH}^2\,.$$

La coppia sarà perciò proporzionale al quadrato del campo H, al flusso calorifico Q, alla superficie del disco S, e dipenderà dal coefficiente U caratteristico del metallo.

Deducendo dall'esperienza il valore di U si viene così a possedere una nuova relazione indipendente dalle altre già note per la determinazione delle costanti caratteristiche di Drude. E come si vede dalla (7) il coefficiente non ha niente da fare col coefficiente

$$Q = -\frac{p}{\sigma}(\sigma_1 x_1 y_2 + \sigma_2 x_2 y_1)$$

del fenomeno trasversale termomagnetico (effetto elettrico) di Ettingshausen e Nernst, come potrebbe sembrare a prima vista.

Osserveremo invece che si può porre la (7) sotto la forma:

$$U = p\,\frac{\sigma}{k} \times \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma^2}(x_1 + x_2) \times \frac{y_1 + y_2}{\sigma} \times \sigma,$$

ora il primo fattore varia di poco per i diversi metalli; il secondo fattore è proporzionale a queste variazioni, cioè alle deviazioni dalla legge di Wiedemann e Franz e il terzo al coefficiente P del fenomeno galvanomagnetico (effetto termico) di Ettingshausen, cioè alla differenza di temperatura trasversale che acquista una lamina percorsa nel campo da una corrente elettrica.

Cosicchè la coppia constatata nelle presenti ricerche dipende dal prodotto dello scarto dalla legge di Wiedemann e Franz, del coefficiente P e della conducibilità σ del metallo.

Purtroppo questi tre elementi si conoscono solo per pochi metalli, e anche in modo poco sicuro; essi sono riferiti nella seguente tabella, nella quale la prima colonna dà i valori delle deviazioni D dalla legge di Wiedemann e Franz, la seconda il coefficiente P, la terza la conducibilità σ riferita all'argento, la quarta il loro prodotto Π, in unità arbitrarie, da cui dovrebbe dipendere U.

	$D.10^8$	$P.10^6$	σ	Π
Ag	0	—	60	0
Cu	22	—	56	0
Costantana . . .	468	—	20	0
Ni	16	0,2	7,4	2,4
Fe	140	0,06	8	67
Carbone	?	5	—	?
Sb	300	2	1,5	900
Bi	308	50	0,8	12300

Come si vede la coppia si potrebbe manifestare solo col bismuto e con l'antimonio, e forse anche col carbone.

In realtà, servendomi della semplice disposizione indicata, non ho ottenuto alcun risultato con dischi di alluminio, di argento e di rame.