ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVIII.

1911

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1911

Meccanica. — *Calcolo delle azioni dinamiche esercitate da correnti fluide sopra pareti rigide.* Nota I di TOMMASO BOGGIO, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Nell' Idraulica, e specialmente nella teoria delle Turbine, è problema di alta importanza quello della determinazione delle azioni dinamiche esercitate da correnti fluide, in modo permanente, sopra pareti rigide.

Tale determinazione è effettuata nei trattati di Idraulica (1) e sulle Turbine (2), per alcuni casi particolari e con speciali artifizî che variano da caso a caso, e, quel che più importa rilevare, con ipotesi e procedimenti tutt'altro che rigorosi; spesso vi si ricorre alle equazioni delle quantità di moto, ma, come giustamente osserva il prof. Levi-Civita, a proposito di questioni analoghe (3) « il punto di vista è sempre particolare, e vi si trascura qualche cosa fin da principio ».

Orbene, facendo invece uso unicamente dei principî fondamentali della Idrodinamica razionale, si può con metodo uniforme, rigoroso, e quanto mai semplice, trattare in tutta la sua generalità la questione enunciata. Come caso particolare si ottengono formule che sono in perfetta armonia con quelle date negli accennati trattati.

È appunto ciò, che mi propongo di mostrare in questo lavoro, nel quale determino dapprima (Nota I) la risultante delle azioni dinamiche, e poi (Nota II) il momento risultante.

Nella trattazione mi valgo dei procedimenti dell'Analisi vettoriale (4), i quali si mostrano particolarmente adatti in tali ricerche, a causa della

(1) Masoni, *Corso di Idraulica*, 3ª ediz. Napoli, a. 1908; Flamant, *Hydraulique*, 3e édit. Paris, a. 1909.

(2) Zeuner, *Théorie des Turbines*, traduite de l'allemand par E. Kreitmann, Paris, a. 1905; Pfarr, *Die Turbinen für Wasserkraftbetrieb*, Berlin, a. 1907.

(3) Levi-Civita, *Sulla contrazione delle vene liquide*. Atti del R. Istituto Veneto, t. LXIV, a. 1904-05.

(4) Cfr. Burali-Forti e Marcolongo, *Eléments de calcul vectoriel*, Paris, a. 1910; *Omografie vettoriali* ecc. Torino, a. 1909. In un breve articolo, pubblicato nel n. 61 della Revue du Mois (10 janvier 1911, pag. 112), il sig. J. Drach dà notizia degli *Eléments de calcul vectoriel* ora citati, ma, a proposito del calcolo vettoriale in genere, dice tali ... amenità, che è naturale il domandarsi se egli abbia proprio capito lo spirito, la sostanza e l'oggetto di detto calcolo. Per conto mio poi desidererei assai che il sig. Drach mi dicesse come si fa, col calcolo abbreviato di Bobillier e cogli invarianti, non a scrivere soltanto i risultati finali da me stabiliti in questo lavoro, ma ad ottenerli in modo altrettanto chiaro e breve, pur avendo sviluppato tutti i calcoli.

estrema semplicità e chiarezza che conferiscono alle formule che si debbono maneggiare.

1. *Formule preliminari.* — Indichiamo con S lo spazio limitato da una superficie chiusa σ, e con $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ due vettori funzioni regolari dei punti P dello spazio S. Si ha allora la formula [1]:

$$\int_S \frac{d\mathbf{v}}{dP}\,\mathbf{u}\,dS = -\int_\sigma (\mathbf{u}\times\mathbf{N})\,\mathbf{v}\,d\sigma - \int_S \mathbf{v}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}\,dS\,, \tag{1}$$

ove $\mathbf{N}$ indica un vettore unitario, normale a σ, e diretto all'interno di S.

Oltre le dimostrazioni di questa formula, indicate nella mia Nota citata, si può pure dare la seguente, assai semplice. Si ha [2]:

$$\mathrm{grad}\,H(\mathbf{u}\,,\mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{v}}{dP}\,\mathbf{u} + \mathbf{v}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}\,,$$

quindi, integrando ambi i membri nello spazio S, e trasformando poi il primo membro in un integrale esteso a σ, risulta:

$$\int_S \mathrm{grad}\,H(\mathbf{u}\,,\mathbf{v})\,dS = -\int_\sigma H(\mathbf{u}\,,\mathbf{v})\,\mathbf{N}\,d\sigma = -\int_\sigma (\mathbf{u}\times\mathbf{N})\,\mathbf{v}\,d\sigma\,,$$

perciò ne segue la (1).

La (1), che è una generalizzazione del lemma di Green, è molto importante per l'Idrodinamica. Nel caso particolare in cui $\mathbf{u} = \mathbf{v} = \mathrm{grad}\,\varphi$, essa è stata data dal prof. Levi-Civita, il quale l'ha utilmente adoperata nella sua Nota già citata. Le equazioni cartesiane, equivalenti alla (1), sono state assegnate e adoperate recentemente dal prof. Cisotti, per stabilire il paradosso di d'Alembert [3]; tale forma cartesiana è però alquanto complicata: e poco dopo io ho fatto vedere (nella mia citata Nota dell'Istituto Veneto) come, per mezzo della (1), si potessero molto semplificare i calcoli.

Ricordiamo ancora che se una massa fluida, di densità ϱ, è animata da moto *stazionario*, il vettore $\mathbf{v}$, velocità di ogni particella fluida P, deve soddisfare all'equazione di continuità:

$$\mathrm{div}\,(\varrho\mathbf{v}) = 0\,, \tag{2}$$

[1] Boggio, *Sul moto permanente di un solido in un fluido indefinito.* Atti del R. Istituto Veneto, t. LXIX, a. 1909-910.

[2] Boggio, *Sul gradiente di una omografia vettoriale.* Rendiconti di questa Accademia, serie 5ª, vol. XIX, 2° sem. 1910.

[3] Cisotti, *Sul moto permanente di un solido in un fluido indefinito.* Atti del R. Istituto Veneto, t. LXIX, a. 1909-910.

e all'equazione fondamentale del moto, che, sotto la forma di Eulero, e in assenza di forze di massa, si scrive [1]:

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\mathrm{P}}\,\mathbf{v} = -\frac{1}{\varrho}\,\mathrm{grad}\,p\,, \tag{3}$$

ove p è l'intensità della pressione.

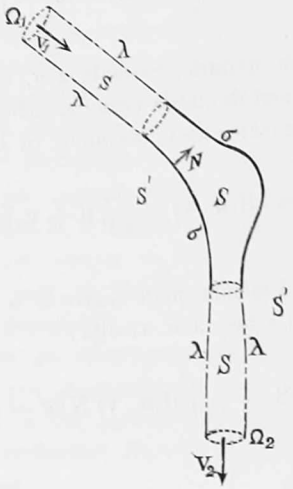

Fig. 1.

Moltiplicando scalarmente la (3) per $d\mathrm{P}$ (supposto che $d\mathrm{P}$ sia preso nella direzione del flusso), si deduce subito:

$$d\mathbf{v}^2 = -2\,\frac{dp}{\varrho}\,,$$

od ancora:

$$\mathbf{v}^2 - \mathbf{v}_0^2 = -2\int_{p_0}^{p}\frac{dp}{\varrho}\,, \tag{3'}$$

ove $\mathbf{v}_0$ è un vettore costante, e p_0 una quantità pure costante (sopra ciascun filetto fluido). Questa equazione non è altro che quella di Bernoulli.

Alle precedenti equazioni bisogna poi aggiungere l'equazione caratteristica del fluido, che, nel caso della temperatura costante, si può scrivere:

$$\varrho = f(p)\,. \tag{4}$$

2. *Pressione nei tubi.* — Indichiamo con σ una superficie tubolare rigida, di forma qualunque, aperta alle due estremità; e supponiamo che il

[1] Boggio, *Dimostrazione assoluta delle equazioni classiche dell'Idrodinamica.* Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XLV, a. 1910.

suo interno sia occupato da una massa fluida in moto; più precisamente supponiamo che una corrente fluida (libera), proveniente dall'infinito, imbocchi il tubo (senza urti), e, dopo averlo attraversato, sbocchi formando così una vena, che si estende pure fino all'infinito.

Si suppone che il moto del fluido sia ovunque stazionario, e che non agiscano forze di massa; circa la natura del fluido non facciamo alcuna ipotesi, come pure non escludiamo che al finito possano esistere dei vortici; si sottintende però che il fluido sia perfetto (non viscoso) e a temperatura costante.

Chiamiamo Ω_1 la sezione normale asintotica (cioè a distanza infinita) della corrente a monte del moto, ed Ω_2 quella asintotica della vena a valle, e supponiamo inoltre che la velocità asintotica a monte $\mathbf{v}_1$ sia costante e normale alla sezione Ω_1, e così pure che la velocità asintotica a valle $\mathbf{v}_2$ sia costante e pure normale alla sezione Ω_2.

Indichiamo con λ le superficie libere, pure di forma tubolare, che limitano la regione occupata dal fluido, sia a monte che a valle del tubo σ.

Lo spazio S occupato dalla massa fluida è così limitato dal contorno $\sigma+\lambda+\Omega_1+\Omega_2$. Nella regione indefinita S', esterna ad S, regna la quiete, perciò in essa si avrà una pressione costante, che chiameremo p_0.

Indichiamo ora con $\mathbf{R}$ il vettore che rappresenta la risultante della azione dinamica esercitata dal fluido in moto sulla parete σ del tubo; esso è la differenza fra la risultante delle forze effettivamente esercitate sul tubo, e quella che si avrebbe *coeteris paribus* nel caso statico.

Si ha perciò:

$$\mathbf{R}=-\int_\sigma (p-p_0)\,\mathbf{N}\,d\sigma.$$

Poichè le superficie λ sono libere, su esse $p=p_0$, onde si può scrivere:

$$\mathbf{R}=-\int_{\sigma+\lambda+\Omega_1+\Omega_2}(p-p_0)\,\mathbf{N}\,d\sigma+\int_{\Omega_1}(p-p_0)\,\mathbf{N}\,d\Omega_1+\int_{\Omega_2}(p-p_0)\,\mathbf{N}\,d\Omega_2.$$

Trasformiamo il primo integrale col teorema del gradiente [1], ed osserviamo che siccome a distanza infinita il moto è uniforme, la pressione (come pure la densità) vi deve essere costante, e avremo così:

$$\mathbf{R}=\int_S \operatorname{grad} p\,dS+(p_1-p_0)\,\Omega_1\frac{\mathbf{V}_1}{V_1}-(p_2-p_0)\,\Omega_2\frac{\mathbf{V}_2}{V_2}, \tag{5}$$

ove p_1 e p_2 sono le pressioni asintotiche rispettivamente a monte e a valle, e V_1, V_2 sono le grandezze delle velocità $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$.

[1] Cfr. i già citati *Eléments de calcul vectoriel*, pag. 105.

Conviene intanto osservare che se, come in figura, il tubo σ non si estende indefinitamente, nella formula (5) spariscono gli ultimi due termini, perchè:

$$p_1 = p_2 = p_0\,; \quad \text{inoltre} \quad \mathbf{v}_1^2 = \mathbf{v}_2^2 = \mathbf{v}_0^2\,; \tag{6}$$

se invece il tubo si estende indefinitamente soltanto a monte, si ha:

$$p_2 = p_0 \quad \text{ed} \quad \mathbf{v}_2^2 = \mathbf{v}_0^2\,, \tag{6'}$$

perciò nella (5) sparisce solo l'ultimo termine; se poi il tubo si estende indefinitamente, sì a monte che a valle, non si presenta più alcuna riduzione nella (5).

Ciò premesso, trasformiamo, nella (5), l'integrale di grad p. Dalla (3) risulta:

$$\int_S \operatorname{grad} p \, dS = -\int_S \frac{d\mathbf{v}}{dP} (\varrho \mathbf{v}) \, dS\,,$$

perciò applicando la (1), e ricordando la (2):

$$\int_S \operatorname{grad} p \, dS = \int_{\sigma+\lambda+\Omega_1+\Omega_2} (\mathbf{v} \times \mathbf{N}) \, \varrho \mathbf{v} \, d\sigma\,;$$

ma nei punti di $\sigma + \lambda$ la velocità è tangenziale, cioè $\mathbf{v} \times \mathbf{N} = 0$, per conseguenza:

$$\int_S \operatorname{grad} p \, dS = \int_{\Omega_1+\Omega_2} (\mathbf{v} \times \mathbf{N}) \, \varrho \mathbf{v} \, d\sigma = \varrho_1 V_1 \Omega_1 \mathbf{v}_1 - \varrho_2 V_2 \Omega_2 \mathbf{v}_2\,,$$

ove ϱ_1, ϱ_2 sono le densità asintotiche a monte e a valle. Anche qui conviene notare che se il tubo σ non si estende indefinitamente, insieme colle (6) si avrà, in virtù della (4): $\varrho_1 = \varrho_2$.

Se si osserva che, per il carattere permanente del moto, la *portata* Q attraverso la sezione Ω_1 deve essere eguale a quella attraverso la sezione Ω_2, si ha:

$$Q = \varrho_1 V_1 \Omega_1 = \varrho_2 V_2 \Omega_2\,, \tag{7}$$

perciò:

$$\int_S \operatorname{grad} p \, dS = Q(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)\,;$$

sostituendo nella (5) avremo infine:

$$\mathbf{R} = Q(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) + (p_1 - p_0)\,\Omega_1 \frac{\mathbf{v}_1}{V_1} - (p_2 - p_0)\,\Omega_2 \frac{\mathbf{v}_2}{V_2}\,. \tag{8}$$

Questa formula mostra che il vettore $\mathbf{R}$ dipende solo da elementi asintotici del moto.

Poichè non abbiamo fatto alcuna ipotesi circa la forma del tubo σ al finito, la (8) vale naturalmente anche se il tubo presenta dei rigonfiamenti, i quali diano origine alla formazione di regioni ove il fluido è in riposo (regioni stagnanti).

Se il tubo σ si estende indefinitamente a monte e a valle, allora Ω_1, Ω_2 denotano le sezioni asintotiche del tubo.

3. *Casi particolari.* — Se il tubo σ non si estende indefinitamente, la (8) si riduce, in forza delle (6), ad

$$\mathbf{R} = Q(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2), \tag{8'}$$

e poi dalla (7) si conclude che le aree delle sezioni Ω_1, Ω_2 devono essere eguali.

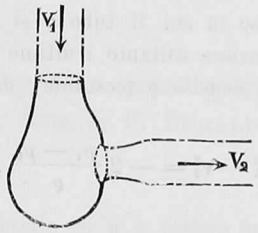

Fig. 2.

La (8′) equivale alle formule stabilite, pel caso dei liquidi, dal Masoni (loc. cit., pag. 168) e dallo Zeuner (loc. cit., pag. 85) per i tubi ad asse piano; però le lettere hanno un significato un po' diverso, perchè mentre nella nostra (8′) $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ sono le velocità asintotiche, nelle formule del Masoni e dello Zeuner indicano invece le velocità del fluido all'ingresso e alla uscita dal tubo, velocità che occorre supporre costanti, mentre, in generale, la velocità all'orifizio di uscita, varia da punto a punto.

L'orifizio di uscita del fluido può essere praticato sulla superficie laterale del tubo (invece che sul fondo), in guisa che la direzione di $\mathbf{v}_2$ risulti perpendicolare a quella di $\mathbf{v}_1$; allora la (8′) porge per la componente R_2 di $\mathbf{R}$ secondo la direzione di $\mathbf{v}_2$ (reazione dinamica orizzontale):

$$R_2 = -QV_2 = -\varrho_2 \Omega_2 V_2^2. \tag{9}$$

Anche il Masoni (loc. cit., pag. 168) ottiene questa formula come caso particolare della (8′); però conviene avvertire che le ipotesi sotto le quali egli ottiene la (8′) — fra le altre quella che il moto abbia luogo per sezioni piane — non sono affatto ammissibili per il caso particolare ora considerato.

La (9) è stata stabilita nell'ipotesi che non agiscano forze di massa; però, come ha già suggerito il prof. Levi-Civita nella sua Nota citata, essa

si può, con sufficiente approssimazione, applicare a problemi ove intervengono forze conservative, come accade ad es. per un liquido pesante, sostituendo però alla sezione asintotica Ω_2 della vena, la sezione contratta Ω', e alla velocità V_2 il valore $\sqrt{2gh}$, ove h è il carico sull'orifizio da cui sgorga la vena, e g è l'accelerazione della gravità. Si ha così dalla (9):

$$R_2 = -2\varrho_2 g\Omega' h.$$

Questa formula è in accordo con quella proposta dallo Zeuner (loco citato, pag. 97).

La (8') sussiste pure se il fluido scorre in un canale, *a pelo libero*, cioè se il tubo σ presenta una spaccatura longitudinale (di larghezza arbitraria), che vada da un'estremità all'altra di esso; il tubo poi può anche estendersi indefinitamente tanto a monte che a valle [1].

Esaminiamo ora il caso in cui il tubo σ si estende indefinitamente a monte; allora nella (8) sparisce soltanto l'ultimo termine; se poi si tratta di un liquido omogeneo di densità ϱ (costante), dalle (3'), (6') risulta:

$$v_1^2 - v_2^2 = -2\,\frac{p_1 - p_0}{\varrho},$$

perciò:

$$R = Q(v_1 - v_2) + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2}\,\varrho\,\Omega_1\,\frac{v_1}{V_1},$$

la quale, ricordando le (7), può ancora scriversi:

$$R = \frac{1}{2}\varrho\Omega_2 V_2^2\left[\left(\frac{\Omega_1}{\Omega_2} + \frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)\frac{v_1}{V_1} - 2\,\frac{v_2}{V_2}\right] \quad (10)$$ [2].

perciò la reazione dinamica della vena liquida non dipende dalla forma del vaso nelle vicinanze dell'orifizio; ciò che si accorda con un'opinione correntemente accettata nella pratica.

Nel caso, particolarmente interessante, in cui l'orifizio è praticato sul fondo del vaso, in guisa che la direzione della vena sia la stessa di quella

[1] In questo caso particolare, e nell'ipotesi di moti in due dimensioni, la (8') è pure stata stabilita recentemente dall'ing. Colonnetti nella Memoria: *Sul moto di un liquido in un canale*, in corso di stampa nei Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.

[2] Nel caso particolare di moti in due dimensioni, la (10) è stata ottenuta dal prof. Cisotti nella Nota recentissima: *Sur la réaction dynamique d'un jet liquide* (Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 23 janvier 1911). Il procedimento del Cisotti (come pure quello adoperato dal Colonnetti nella Memoria sopra citata), analogo a quello esposto dal prof. Levi-Civita per il problema dei moti con scia, è fondato sulla teoria delle funzioni di variabile complessa, e sul teorema di Cauchy sui residui.

dell'asse del vaso, si ha $\mathbf{v}_1 : V_1 = \mathbf{v}_2 : V_2$, perciò dalla (10) si trae:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2}\varrho\,\Omega_2 V_2^2 \left[\frac{\Omega_1}{\Omega_2} + \frac{\Omega_2}{\Omega_1} - 2\right]\frac{\mathbf{v}_1}{V_1},$$

vale a dire la reazione della vena liquida è interamente sopportata dal fondo del vaso. Se invece il vaso non si estendesse indefinitamente a monte, la (8') porgerebbe, nelle stesse ipotesi, $\mathbf{R} = 0$, il quale risultato è evidentemente paradossale.

Se poi l'orifizio è scolpito (fig. 2) su parete verticale, l'espressione che la (10) porge per la reazione dinamica orizzontale R_2, coincide colla (9).

Anche la (10) si può, come si è fatto per la (9), estendere al caso di liquidi pesanti.

Matematica. — *Sopra un nuovo operatore differenziale per le omografie vettoriali.* Nota di C. Burali-Forti, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Se α è omografia vettoriale ed $\mathbf{u}$ è vettore funzione del punto P variabile in un campo a tre dimensioni, è noto (*O. v.* [1], pag. 47, [7]) che

$$\frac{d(\alpha\mathbf{u})}{dP} = \alpha\frac{d\mathbf{u}}{dP} + \lambda,$$

essendo λ l'omografia tale che, per $\mathbf{x}$ vettore arbitrario,

$$\lambda\mathbf{x} = \left(\frac{d\alpha}{dP}\mathbf{x}\right)\mathbf{u}.$$

Per la rotazione del vettore $\alpha\mathbf{u}$ si ha dunque

$$\mathrm{rot}\,(\alpha\mathbf{u}) = 2V\left(\alpha\frac{d\mathbf{u}}{dP}\right) + 2V\lambda,$$

ma la $\mathrm{rot}(\alpha\mathbf{u})$ non può esser calcolata direttamente mediante α ed $\mathbf{u}$, sino a che non si sappia esprimere, pure mediante α ed $\mathbf{u}$, il vettore di λ.

Scopo di questa Nota è di dimostrare che il $V\lambda$ si ottiene applicando ad $\mathbf{u}$ una omografia, funzione di α, della quale è possibile, e facile, il calcolo effettivo comunque sia data α (formule del n. 2). Tale omografia gode di

[1] C. Burali-Forti e R. Marcolongo, *Omografie vettoriali* .... Torino, 1909, G. B. Petrini.