ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVIII.

1911

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1911

dell'asse del vaso, si ha $\mathbf{v}_1 : V_1 = \mathbf{v}_2 : V_2$, perciò dalla (10) si trae:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2} \varrho \Omega_2 V_2^2 \left[\frac{\Omega_1}{\Omega_2} + \frac{\Omega_2}{\Omega_1} - 2 \right] \frac{\mathbf{v}_1}{V_1},$$

vale a dire la reazione della vena liquida è interamente sopportata dal fondo del vaso. Se invece il vaso non si estendesse indefinitamente a monte, la (8') porgerebbe, nelle stesse ipotesi, $\mathbf{R} = 0$, il quale risultato è evidentemente paradossale.

Se poi l'orifizio è scolpito (fig. 2) su parete verticale, l'espressione che la (10) porge per la reazione dinamica orizzontale R_2, coincide colla (9).

Anche la (10) si può, come si è fatto per la (9), estendere al caso di liquidi pesanti.

Matematica. — *Sopra un nuovo operatore differenziale per le omografie vettoriali.* Nota di C. Burali-Forti, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Se α è omografia vettoriale ed $\mathbf{u}$ è vettore funzione del punto P variabile in un campo a tre dimensioni, è noto (*O. v.* [1], pag. 47, [7]) che

$$\frac{d(\alpha\mathbf{u})}{dP} = \alpha \frac{d\mathbf{u}}{dP} + \lambda,$$

essendo λ l'omografia tale che, per $\mathbf{x}$ vettore arbitrario,

$$\lambda\mathbf{x} = \left(\frac{d\alpha}{dP}\mathbf{x}\right)\mathbf{u}.$$

Per la rotazione del vettore $\alpha\mathbf{u}$ si ha dunque

$$\text{rot}(\alpha\mathbf{u}) = 2V\left(\alpha \frac{d\mathbf{u}}{dP}\right) + 2V\lambda,$$

ma la rot$(\alpha\mathbf{u})$ non può esser calcolata direttamente mediante α ed $\mathbf{u}$, sino a che non si sappia esprimere, pure mediante α ed $\mathbf{u}$, il vettore di λ.

Scopo di questa Nota è di dimostrare che il $V\lambda$ si ottiene applicando ad $\mathbf{u}$ una omografia, funzione di α, della quale è possibile, e facile, il calcolo effettivo comunque sia data α (formule del n. 2). Tale omografia gode di

[1] C. Burali-Forti e R. Marcolongo, *Omografie vettoriali* ..... Torino, 1909, G. B. Petrini.

molte e notevoli proprietà che applichiamo alla risoluzione di alcune equazioni le quali, evidentemente, hanno notevole importanza in questioni di Fisica e di Meccanica. Le dimostrazioni sono semplicissime; ci risparmiamo, in generale, di citare nelle *O. v.* le regole note di calcolo omografico che applichiamo; però sviluppiamo completamente i calcoli necessarî per tali dimostrazioni.

1. In tutto ciò che segue: $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ sono vettori funzioni del punto P che varia in un campo a tre dimensioni; $\mathbf{a}$ è vettore costante, arbitrario; $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ è terna unitaria-ortogonale-destrogira-costante di vettori; α, β sono omografie funzioni del punto P; m è numero pure funzione di P.

Con la notazione $\mathrm{Rot}\,\alpha$ indichiamo l'*omografia*, funzione di α, tale che comunque si fissi il vettore $\mathbf{u}$ si ha sempre

$$(\mathrm{Rot}\,\alpha)\,\mathbf{u} = \mathrm{rot}\,(\alpha\mathbf{u}) - 2\mathrm{V}\left(\alpha\,\frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}}\right). \tag{1}$$

Occorre dimostrare che $\mathrm{Rot}\,\alpha$, *così definita dalla* (1), *è realmente una omografia vettoriale.*

Risulta subito dalla (1) che

$$(\mathrm{Rot}\,\alpha)\,(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = (\mathrm{Rot}\,\alpha)\,\mathbf{u} + (\mathrm{Rot}\,\alpha)\,\mathbf{v} \tag{a}$$

$$\begin{aligned}(\mathrm{Rot}\,\alpha)\,(m\mathbf{u}) &= m\,\mathrm{rot}\,(\alpha\mathbf{u}) + \mathrm{grad}\,m \wedge \alpha\mathbf{u} - \\ &- 2\mathrm{V}\left\{m\alpha\,\frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}} + \alpha\mathrm{H}(\mathrm{grad}\,m\,,\mathbf{u})\right\} = m\left\{\mathrm{rot}\,(\alpha\mathbf{u}) - 2\mathrm{V}\left(\alpha\,\frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}}\right)\right\} + \\ &+ \mathrm{grad}\,m \wedge \alpha\mathbf{u} - 2\mathrm{VH}\,(\mathrm{grad}\,m\,,\alpha\mathbf{u}) = m\,(\mathrm{rot}\,\alpha)\,\mathbf{u}\,,\end{aligned} \tag{b}$$

e le (*a*), (*b*) provano appunto che $\mathrm{Rot}\,\alpha$ è omografia.

È poi evidente che: Rot *è operatore che applicato ad una omografia produce una omografia*, e quindi, Rot *ammette qualsiasi potenza positiva.*

In particolare, ponendo nella (1), in luogo di $\mathbf{u}$, il vettore costante, arbitrario, $\mathbf{a}$ si ha

$$(\mathrm{Rot}\,\alpha)\,\mathbf{a} = \mathrm{rot}\,(\alpha\mathbf{a}) \tag{2}$$

il che giustifica la notazione $\mathrm{Rot}\,\alpha$ scelta per indicare l'omografia, funzione di α, definita dalla (1) [1].

Per le potenze di Rot si ha, per induzione,

$$(\mathrm{Rot}^n\,\alpha)\,\mathbf{a} = \mathrm{rot}^n\,(\alpha\mathbf{a})\,. \tag{2'}$$

[1] Non giustificherebbe però la notazione $\mathrm{rot}\,\alpha$, finchè $\mathbf{rot}$ rimane, nel significato usuale, operatore per i *vettori*, mentre il nuovo simbolo *deve essere* operatore per le *omografie*.

Introducendo la terna $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$

$$\text{(3)} \qquad \mathrm{Rot}\,\alpha = \mathbf{i} \wedge \frac{d\alpha}{d\mathrm{P}}\mathbf{i} + \mathbf{j} \wedge \frac{d\alpha}{d\mathrm{P}}\mathbf{j} + \mathbf{k} \wedge \frac{d\alpha}{d\mathrm{P}}\mathbf{k}\,,$$

perchè, per proprietà ben note,

$$(\mathrm{Rot}\,\alpha)\,\mathbf{a} = \mathrm{rot}(\alpha\mathbf{a}) = 2\mathrm{V}\,\frac{d(\alpha\mathbf{a})}{d\mathrm{P}} = \mathbf{i} \wedge \frac{d(\alpha\mathbf{a})}{d\mathrm{P}}\mathbf{i} + \cdots = \left\{\mathbf{i} \wedge \frac{d\alpha}{d\mathrm{P}}\mathbf{i} + \cdots\right\}\mathbf{a}\,.$$

L'operatore Rot è distributivo rispetto alla somma,

$$\text{(4)} \qquad \mathrm{Rot}(\alpha + \beta) = \mathrm{Rot}\,\alpha + \mathrm{Rot}\,\beta$$

come risulta subito dalla (1) o dalla (2). Non è però commutativo col prodotto per un numero, e si ha

$$\text{(5)} \qquad \mathrm{Rot}(m\alpha) = m\,\mathrm{Rot}\,\alpha + \mathrm{grad}\,m \wedge \alpha \quad \text{(}^1\text{)},$$

perchè

$$\}\mathrm{Rot}(m\alpha)\{\,\mathbf{a} = \mathrm{rot}(m\alpha\mathbf{a}) = m\,\mathrm{rot}(\alpha\mathbf{a}) + \mathrm{grad}\,m \wedge \alpha\mathbf{a} =$$
$$= (m\,\mathrm{Rot}\,\alpha + \mathrm{grad}\,m \wedge \alpha)\,\mathbf{a}\,.$$

2. Per il calcolo effettivo dell'omografia $\mathrm{Rot}\,\alpha$ valgono le formule fondamentali seguenti:

$$\text{(6)} \qquad \mathrm{Rot}\,m = \mathrm{grad}\,m \wedge \quad \text{(}^2\text{)}$$

$$\text{(7)} \qquad \mathrm{Rot}\,\mathbf{u} \wedge = \frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}} - \mathrm{div}\,\mathbf{u} = -\,\mathrm{C}\,\frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}} \quad \text{(}^3\text{)}$$

(1) Se nella nota formula

$$\mathrm{rot}(m\mathbf{u}) = m\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u} + \mathrm{grad}\,m \wedge \mathbf{u}$$

si cambia rot ed $\mathbf{u}$ in Rot ed α, si ottiene la (5).

Se nella formula, pure nota,

$$\mathrm{C}\alpha(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = \mathbf{u} \wedge \mathrm{K}\alpha\,\mathbf{v} + (\mathrm{K}\alpha\mathbf{u}) \wedge \mathbf{v}$$

si cambia $\mathbf{v}$ in una omografia β, si ottiene una formula vera.

Da questi ed altri esempi non è lecito dedurre, imitando i moderni quaternianisti, che *omografia* e *vettore* sono una stessa cosa, e nemmeno, imitando quanto ha fatto il Gibbs per il ∇, dedurne che le omografie sono *vettori simbolici*.

(2) Dalle due formule

$$\mathrm{grad}\,m \times = \frac{dm}{d\mathrm{P}} \quad , \quad \mathrm{grad}\,m \wedge = \mathrm{Rot}\,m$$

risulta che l'operatore $\frac{dm}{d\mathrm{P}}$, e il nuovo operatore $\mathrm{Rot}\,m$, dànno tutti gli operatori semplici che dipendono da $\mathrm{grad}\,m$.

Per l'operatore $\frac{d\alpha}{d\mathrm{P}}$, a 27 dimensioni, si hanno attualmente le due funzioni grad Rot che dipendono da $\alpha\mathbf{a}$

$$\mathrm{div}(\alpha\mathbf{a}) = \mathrm{grad}\,\mathrm{K}\alpha \times \mathbf{a} \quad , \quad \mathrm{rot}(\alpha\mathbf{a}) = (\mathrm{Rot}\,\alpha)\,\mathbf{a}\,,$$

ma è certo che ne devono esistere altre e praticamente importanti.

(3) $\mathrm{Rot}\,\mathbf{u} \wedge$ significa $\mathrm{Rot}(\mathbf{u} \wedge)$ e non $(\mathrm{Rot}\,\mathbf{u}) \wedge$ che è privo di significato (ciò non avverrebbe se si fosse scritto, illogicamente, $\mathrm{rot}\,\alpha$ in luogo di $\mathrm{Rot}\,\alpha$).

(8) $$\operatorname{Rot} H(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = H(\mathbf{u}, \operatorname{rot} \mathbf{v}) - \mathbf{v} \wedge K \frac{d\mathbf{u}}{dP}$$

(9) $$\operatorname{Rot}(\mathbf{u} \wedge \alpha) = H(\operatorname{grad} K\alpha, \mathbf{u}) - \frac{d\alpha}{dP} \mathbf{u} - \left(C \frac{d\mathbf{u}}{dP}\right) \alpha$$

(10) $$\operatorname{Rot} \frac{d\mathbf{u}}{dP} = \frac{d(\operatorname{rot} \mathbf{u})}{dP}$$

(11) $$\operatorname{Rot} K \frac{d\mathbf{u}}{dP} = 0 .$$

Anche le dimostrazioni sono interessanti per la loro semplicità.

Dim. (6). $(\operatorname{Rot} m)\, \mathbf{a} = \operatorname{rot}(m\mathbf{a}) = \operatorname{grad} m \wedge \mathbf{a} = (\operatorname{grad} m \wedge)\, \mathbf{a}$

Dim. (7). $(\operatorname{Rot} \mathbf{u} \wedge)\, \mathbf{a} = \operatorname{rot}(\mathbf{u} \wedge \mathbf{a}) = \left(\frac{d\mathbf{u}}{dP} - \operatorname{div} \mathbf{u}\right) \mathbf{a}$

Dim. (8). $$\{\operatorname{Rot} H(\mathbf{u}, \mathbf{v})\}\, \mathbf{a} = \operatorname{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{a} \,.\, \mathbf{v}) =$$
$$= \mathbf{u} \times \mathbf{a} \,.\, \operatorname{rot} \mathbf{v} + \operatorname{grad}(\mathbf{u} \times \mathbf{a}) \wedge \mathbf{v}$$
$$= H(\mathbf{u}, \operatorname{rot} \mathbf{v})\, \mathbf{a} + \left(K \frac{d\mathbf{u}}{dP} \mathbf{a}\right) \wedge \mathbf{v} = \left\{H(\mathbf{u}, \operatorname{rot} \mathbf{v}) - \mathbf{v} \wedge K \frac{d\mathbf{u}}{dP}\right\} \mathbf{a}$$

Dim. (9). $$\{\operatorname{Rot}(\mathbf{u} \wedge \alpha)\}\, \mathbf{a} = \operatorname{rot}(\mathbf{u} \wedge \alpha\mathbf{a}) =$$
$$= \left\{\operatorname{div}(\alpha\mathbf{a}) - \frac{d(\alpha\mathbf{a})}{dP}\right\} \mathbf{u} - \left(C \frac{d\mathbf{u}}{dP}\right) \alpha\mathbf{a}$$
$$= \operatorname{grad} K\alpha \times \mathbf{a} \,.\, \mathbf{u} - \left(\frac{d\alpha}{dP} \mathbf{u}\right) \mathbf{a} - \left(C \frac{d\mathbf{u}}{dP}\right) \alpha\mathbf{a} =$$
$$= \left\{H(\operatorname{grad} K\alpha, \mathbf{u}) - \frac{d\alpha}{dP} \mathbf{u} - \left(C \frac{d\mathbf{u}}{dP}\right) \alpha\right\} \mathbf{a}$$

Dim. (10). $\left(\operatorname{Rot} \frac{d\mathbf{u}}{dP}\right) \mathbf{a} = \operatorname{rot}\left(\frac{d\mathbf{u}}{dP} \mathbf{a}\right) = \frac{d \operatorname{rot} \mathbf{u}}{dP} \mathbf{a}$

Dim. (11). $$\left(\operatorname{Rot} K \frac{d\mathbf{u}}{dP}\right) \mathbf{a} = \operatorname{rot}\left(K \frac{d\mathbf{u}}{dP} \mathbf{a}\right) = \operatorname{rot}\left\{\frac{d\mathbf{u}}{dP} \mathbf{a} - \operatorname{rot} \mathbf{u} \wedge \mathbf{a}\right\}$$
$$= \frac{d \operatorname{rot} \mathbf{u}}{dP} \mathbf{a} + \left(\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{u} - \frac{d \operatorname{rot} \mathbf{u}}{dP}\right) \mathbf{a} = 0 .$$

Si ha dalla (7) (Cfr. *O. v.*, pag. 58, [11])

$$\operatorname{rot}(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = (\operatorname{Rot} \mathbf{u} \wedge)\, \mathbf{v} - (\operatorname{Rot} \mathbf{v} \wedge)\, \mathbf{u}$$

e quindi Rot è l'operatore differenziale che dà a $\operatorname{rot}(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$ la stessa forma di

$$d(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = (d\mathbf{u} \wedge)\, \mathbf{v} - (d\mathbf{v} \wedge)\, \mathbf{u} .$$

3. Per i prodotti degli operatori Rot, V, I_1, K, grad, Δ, si hanno le formule notevoli:

(12) $$\mathrm{Rot}^2 \alpha = \mathrm{K}\,\frac{d\,\mathrm{grad}\,\mathrm{K}\alpha}{d\mathrm{P}} - \Delta\alpha$$

(13) $$2\mathrm{V}\,\mathrm{Rot}\,\alpha = \mathrm{grad}\,\mathrm{C}\alpha$$

(14) $$\mathrm{I}_1\,\mathrm{Rot}\,\alpha = -2\,\mathrm{div}\,\mathrm{V}\alpha$$

(15) $$\mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\alpha = \mathrm{Rot}\,\alpha - (\mathrm{grad}\,\mathrm{C}\alpha)\wedge$$

(16) $$\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\alpha = \mathrm{Rot}\,\alpha + 2\mathrm{C}\,\frac{d\mathrm{V}\alpha}{d\mathrm{P}}$$

(17) $$\mathrm{grad}\,\mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\alpha = 0$$

(18) $$\mathrm{grad}\,\mathrm{Rot}\,\alpha = \mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\alpha$$

(19) $$\mathrm{Rot}\,\Delta\alpha = \Delta\,\mathrm{Rot}\,\alpha = -\mathrm{Rot}^3\alpha$$

(20) $$\mathrm{V}\,\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\alpha = -\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathrm{V}\alpha$$

(21) $$\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\,\mathrm{Rot}(\mathrm{V}\alpha\wedge) = (\mathrm{V}\,\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\alpha)\wedge\,,\quad \mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\mathrm{D}\alpha = \mathrm{D}\,\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\alpha.$$

Dim. (12). $$(\mathrm{Rot}^2\alpha)\,\mathbf{a} = \mathrm{rot}^2(\alpha\mathbf{a}) = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\alpha\mathbf{a} - \Delta'(\alpha\mathbf{a})$$
$$= \mathrm{grad}(\mathrm{grad}\,\mathrm{K}\alpha \times \mathbf{a}) - (\Delta\alpha)\,\mathbf{a} = \left\{\mathrm{K}\,\frac{d\,\mathrm{grad}\,\mathrm{K}\alpha}{d\mathrm{P}} - \Delta\alpha\right\}\mathbf{a}\,.$$

Dim. (13). Dalla (3) e mediante altre formule note (*O. v.*, pag. 19, [11]; pag. 52 [1] [10]; pag. 50, [2] si ha

$$2\mathrm{V}\,\mathrm{Rot}\,\alpha = \left\{\mathrm{I}_1\left(\frac{d\alpha}{d\mathrm{P}}\mathbf{i}\right) - \frac{d\alpha}{d\mathrm{P}}\mathbf{i}\right\}\mathbf{i} + \cdots = \left\{\mathbf{i}\times\mathrm{grad}\,\mathrm{I}_1\alpha - \frac{d\alpha}{d\mathrm{P}}\mathbf{i}\right\}\mathbf{i} = \text{ecc.}\ [2].$$

[1] Per l'omografia $\frac{d\alpha}{d\mathrm{P}}\mathbf{u}$ si ha

$$\mathrm{I}_1\left(\frac{d\alpha}{d\mathrm{P}}\mathbf{u}\right) = \mathbf{u}\times\mathrm{grad}\,\mathrm{I}_1\alpha\,,\quad \mathrm{V}\left(\frac{d\alpha}{d\mathrm{P}}\mathbf{u}\right) = \frac{d\mathrm{V}\alpha}{d\mathrm{P}}\mathbf{u}\,;$$

la prima è nota; la seconda è evidente perchè d e V sono commutabili. Volendo dimostrarla con la terna $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ si presenta l'omografia

$$\mu = \mathbf{i}\wedge\frac{d(\alpha\mathbf{i})}{d\mathrm{P}} + \mathbf{j}\wedge\frac{d(\alpha\mathbf{j})}{d\mathrm{P}} + \mathbf{k}\wedge\frac{d(\alpha\mathbf{k})}{d\mathrm{P}} = 2\,\frac{d\mathrm{V}\alpha}{d\mathrm{P}}$$

come si vede subito calcolando $\mu\,d\mathrm{P}$. Ciò prova che μ, sebbene *simile* a Rot α, ne differisce profondamente.

[2] Oppure:

$$2\mathrm{V}\,\mathrm{Rot}\,\alpha\times\mathbf{a}\wedge\mathbf{b} = \mathbf{b}\times\mathrm{rot}(\alpha\mathbf{a}) - \mathbf{a}\times\mathrm{rot}(\alpha\mathbf{b}) =$$
$$= \mathrm{div}(\mathbf{a}\wedge\alpha\mathbf{b} - \mathbf{b}\wedge\alpha\mathbf{a}) = \mathrm{div}\,\{\mathrm{K}\mathrm{C}\alpha(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\} = \mathrm{grad}\,\mathrm{C}\alpha\times\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\,.$$

Dim. (14). $\mathrm{I}_1 \operatorname{Rot} \alpha = -2\,\mathbf{i} \times \mathrm{V}\left(\frac{d\alpha}{dP}\,\mathbf{i}\right) - \dots =$

$$= -2\,\mathbf{i} \times \frac{d\mathrm{V}\alpha}{dP}\,\mathbf{i} - \dots = -2\,\mathrm{I}_1 \frac{d\mathrm{V}\alpha}{dP}.$$

Dim. (16). $\operatorname{Rot} \mathrm{K}\alpha = \operatorname{Rot}(\alpha - 2\mathrm{V}\alpha \wedge) =$ ecc. (per la (7))

Dim. (17). $(\operatorname{grad} \mathrm{K} \operatorname{Rot} \alpha) \times \mathbf{a} = \operatorname{div} \operatorname{rot}(\alpha\mathbf{a}) = 0$

Dim. (18). Dalla (15) e (17) si ha

$$\operatorname{grad} \operatorname{Rot} \alpha = \operatorname{grad} \{(\operatorname{grad} \mathrm{C}\alpha) \wedge\} = -\operatorname{rot} \operatorname{grad} \mathrm{C}\alpha = \operatorname{rot} \operatorname{grad} \alpha$$

Dim. (19). Dalla (12) e (11) si ha subito la prima delle (19). Per la seconda:

$(\Delta \operatorname{Rot} \alpha)\,\mathbf{a} = \Delta' \{\operatorname{rot}(\alpha\mathbf{a})\} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \operatorname{rot}(\alpha\mathbf{a}) - \operatorname{rot}^3(\alpha\mathbf{a}) = -(\operatorname{Rot}^3\alpha)\,\mathbf{a}.$

Dim. (20). $2\mathrm{V} \operatorname{Rot} \mathrm{K} \operatorname{Rot} \alpha = \operatorname{grad} \mathrm{C}\,\mathrm{K} \operatorname{Rot} \alpha =$

$$= \operatorname{grad} \mathrm{I}_1 \operatorname{Rot} \alpha = -2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathrm{V}\alpha$$

Dim. (21). $\operatorname{Rot} \mathrm{K} \operatorname{Rot}(\mathrm{V}\alpha \wedge) = -\operatorname{Rot} \mathrm{KC} \frac{d\mathrm{V}\alpha}{dP} =$

$$= -\operatorname{Rot} \operatorname{div} \mathrm{V}\alpha = -(\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathrm{V}\alpha) \wedge.$$

4. Si ha il corrispondente di un noto e fecondo teorema di Clebsch. *Se* α *è omog., funzione di* P, *si può, in infiniti modi, determinare l'omografia* β *e il vettore* $\mathbf{u}$, *funzioni di* P, *in guisa che*

$$(a) \qquad \alpha = \operatorname{Rot} \beta + \mathrm{K} \frac{d\mathbf{u}}{dP}.$$

Se $\mathbf{a}$ è vettore costante si ha (teorema di Clebsch)

$$\alpha\mathbf{a} = \operatorname{rot} \mathbf{v} + \operatorname{grad} m$$

con $\mathbf{v}$ vettore ed m numero funzioni di P e di $\mathbf{a}$; ma tali funzioni sono lineari rispetto ai vettori costanti $\mathbf{a}$ e quindi esiste l'omografia β e il vettore $\mathbf{u}$, funzioni di P soltanto, tali che per $\mathbf{a}$ vettore costante, arbitrario,

$$\mathbf{v} = \beta\mathbf{a} \quad , \quad m = \mathbf{u} \times \mathbf{a}.$$

La formula precedente diviene

$$\alpha\mathbf{a} = \operatorname{rot}(\beta\mathbf{a}) + \operatorname{grad}(\mathbf{u} \times \mathbf{a}) = \left(\operatorname{Rot} \beta + \mathrm{K} \frac{d\mathbf{u}}{dP}\right)\mathbf{a}.$$

Segue che: *Ogni* Rot *è pure una* Rot^2. Cioè, in particolare: *L'equazione* $\operatorname{Rot}^2 \xi = \operatorname{Rot} \alpha$ *ammette come soluzioni le omografie* β *che soddisfano alla* (*a*).

Operando con Rot nei due membri della (a) si ha $\mathrm{Rot}\,\alpha = \mathrm{Rot}^2\beta$. Viceversa sia $\mathrm{Rot}(\mathrm{Rot}\,\xi - \alpha) = \mathrm{Rot}\,\eta = 0$; dalle condizioni equivalenti

$$\mathrm{Rot}\,\eta = 0\ ,\ \mathrm{rot}(\eta\mathbf{a}) = 0\ ,\ \eta\mathbf{a} = -\,\mathrm{grad}\,m = -\,\mathrm{grad}\,(\mathbf{u}\times\mathbf{a}) = -\,\mathrm{K}\frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}}\,\mathbf{a}$$

risulta $\mathrm{Rot}\,\xi = \alpha - \mathrm{K}\dfrac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}}$ che è la (a) per $\beta = \xi$.

5. *L'equazione* $\mathrm{grad}\,\xi = 0$ *ha come soluzione generale*

$$\xi = \mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\alpha$$

con α *omog.* ARBITRARIA,

In virtù della (17), $\mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\alpha$ è soluzione della equazione. Viceversa: da $\mathrm{grad}\,\xi = 0$ e per $\mathbf{a}$ vettore costante si ha

$$\mathbf{a}\times\mathrm{grad}\,\xi = 0\ ,\ \mathrm{div}(\mathrm{K}\xi\mathbf{a}) = 0\ ,\ \mathrm{K}\xi\mathbf{a} = \mathrm{rot}\,\mathbf{v} = \mathrm{rot}(\alpha\mathbf{a}) = (\mathrm{Rot}\,\alpha)\,\mathbf{a}$$

che dà, appunto, $\mathrm{K}\xi = \mathrm{Rot}\,\alpha$, cioè $\xi = \mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\alpha$ [1].

Il teorema seguente risolve in modo semplicissimo una questione già risolta da Maxwel, Morera, Beltrami, e prova immediatamente che le due soluzioni, di forma diversa, date da Morera e Beltrami, poi dal Morera dimostrate equivalenti, corrispondono al riferire $\mathrm{D}\alpha$ alle sue direzioni principali o a tre direzioni auto-polari [2].

L'equazione $\mathrm{grad}\,\mathrm{D}\xi = 0$ *ha come soluzione generale*

$$\mathrm{D}\xi = \mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\mathrm{D}\alpha$$

essendo $\mathrm{D}\alpha$ *dilatazione* ARBITRARIA.

Per la (20), $\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\mathrm{D}\alpha$ è dilatazione; e poichè essa coincide con la sua coniugata, per la (17) è soluzione. Che è soluzione generale può anche vedersi osservando che essa ha *sei* dimensioni come $\mathrm{D}\alpha$; oppure così. Da $\mathrm{grad}\,\mathrm{D}\xi = 0$ segue $\mathrm{D}\xi = \mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\beta$ con $\mathrm{V}\,\mathrm{Rot}\,\beta = 0$, cioè $\mathrm{grad}\,\mathrm{C}\beta = 0$, o ancora, $\mathrm{C}\beta = -\,\mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\alpha$; osservando che $\mathrm{I}_1\mathrm{C}\beta = 2\,\mathrm{I}_1\beta = 2\,\mathrm{div}\,\mathrm{V}\alpha$, si ha

$$\begin{aligned}\mathrm{D}\xi &= \mathrm{K}\,\mathrm{Rot}(\mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\alpha + \mathrm{I}_1\beta) = \mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\alpha + \mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\mathrm{div}\,\mathrm{V}\alpha \\ &= \mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\,\mathrm{Rot}\,\alpha - (\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathrm{V}\alpha)\wedge\,,\end{aligned}$$

che per le (20), (21) dà a $\mathrm{D}\xi$ la forma indicata.

[1] Dalla mia Nota: *Sull'operatore di Laplace per le omografie vettoriali* (Questi Rendic., v. XX, s. 5ª, 1911, pp. 10-16) e dalla (12) risulta subito (basta porre $\alpha = -\,\mathrm{K}\beta$), $\xi = \mathrm{K}\,\mathrm{Rot}^2\beta$; ma tale risultato concorda con quello ora trovato a causa dell'ultimo teorema del n. 4. Per l'equazione $\mathrm{grad}\,\xi = \mathbf{f}$ cfr. la Nota ora citata.

[2] Maxwell, Scientific Papers, vol. II, pag. 102; Morera, *Soluzione generale delle equazioni indefinite dell'equilibrio di un capo continuo*, Rend. Acc. Lincei. vol. I, ser. 5ª, 1892, pag. 137; Beltrami, *Osservazioni sulla Nota precedente*, pag. 141; Morera, *Appendice alla Nota*: *Soluzione* ecc., pag. 233.

6. *L'omografia* α *è una* Rot *solamente quando*

$$\operatorname{grad} K\alpha = 0 .$$

Invero per $\mathbf{a}$ vettore costante arbitrario le condizioni

$$\operatorname{grad} K\alpha = 0 \ , \ \mathbf{a} \times \operatorname{grad} K\alpha = 0 \ , \ \operatorname{div}(\alpha\mathbf{a}) = 0 \ ,$$
$$\alpha\mathbf{a} = \operatorname{rot}\mathbf{u} = \operatorname{rot}(\beta\mathbf{a}) = (\operatorname{Rot}\beta)\,\mathbf{a}$$

sono equivalenti.

L'equazione $\operatorname{Rot}\xi = \alpha$ *ammette soluzioni solamente quando* $\operatorname{grad} K\alpha = 0$; *questa condizione essendo soddisfatta e posto (teorema precedente)* $\alpha = \operatorname{Rot}\beta$, *la soluzione generale è*

$$\xi = \beta + K \frac{d\mathbf{u}}{dP}$$

con $\mathbf{u}$ *vettore* ARBITRARIO.

Risulta subito dal teorema precedente e dalla dimostrazione dell'ultimo teorema del n. 4.

7. *L'omografia* α *individua una* DEFORMAZIONE DI CORPO CONTINUO *(cioè* αdP *è un differenziale esatto) solamente quando* $\operatorname{Rot} K\alpha = 0$.

Dal n. 6 risulta che $\operatorname{Rot} K\alpha = 0$ dà $\alpha = \frac{d\mathbf{u}}{dP}$; viceversa $\alpha = \frac{d\mathbf{u}}{dP}$ dà, per la (11), $\operatorname{Rot} K\alpha = 0$.

Le *sei* relazioni di Saint-Venant per le componenti di una *deformazione pura* sono, dal teorema seguente, ridotte ad *una* sola.

Affinchè $D\alpha$ *individui una* DEFORMAZIONE PURA DI CORPO CONTINUO *è necessario e sufficiente che*

$$(a) \qquad \operatorname{Rot} K \operatorname{Rot} D\alpha = 0 .$$

Se $\alpha dP = d\mathbf{u}$, allora $\operatorname{Rot} K\alpha = 0$ e poichè $2K\alpha = 2D\alpha - (\operatorname{rot}\mathbf{u})\wedge$ si ha facilmente

$$(b) \qquad \operatorname{Rot} D\alpha = \frac{1}{2}\frac{d \operatorname{rot}\mathbf{u}}{dP}$$

che per la (11) dimostra essere (a) condizione *necessaria*. Se la (a) è vera, allora (n. 6) $\operatorname{Rot} D\alpha = \frac{d\mathbf{v}}{dP}$ che per la (b) determina $\operatorname{rot}\mathbf{u}$ in modo che $\operatorname{Rot} K\alpha = 0$, cioè la condizione è *sufficiente*.