

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVIII.

1911

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XX.

1° SEMESTRE.



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1911

Meccanica. — *Sull'efflusso dei liquidi fra pareti che presentano una interruzione.* Nota I di GUSTAVO COLONNETTI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Nell'ultimo paragrafo di una mia recente Memoria ⁽¹⁾ ho avuto occasione di rilevare che ogniqualvolta una parete rigida guidante un liquido in moto permanente, presenta verso il campo del moto una convessità con curvatura *sufficientemente pronunciata* o addirittura una cuspide, il fenomeno non può mantenersi ovunque continuo ed irrotazionale.

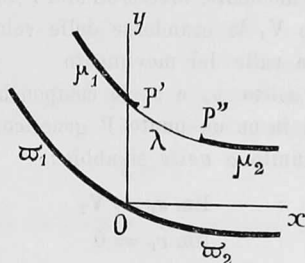


FIG. 1.

Lo studio dei moti liquidi caratterizzati da simili singolarità, tutt'altro che rare nella pratica (si pensi ad es. ai fenomeni che si verificano in prossimità dei gomiti ovvero dei cambiamenti bruschi di sezione nei tubi), presenta difficoltà analitiche gravissime.

In mancanza perciò di una soluzione completa del problema, sembra non privo di interesse notare come si possa pervenire ad assegnare l'integrale generale dei moti liquidi *permanenti, piani ed irrotazionali* ⁽²⁾ dotati di una discontinuità di dimensioni finite ⁽³⁾.

1. Un liquido, fluido incompressibile, non sollecitato da forze ed omogeneo (la cui densità costante prenderemo eguale all'unità), si muova con moto piano, continuo, permanente ed irrotazionale in una regione A (fig. 1)

⁽¹⁾ Colonnetti, *Sul moto di un liquido in un canale*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1911.

⁽²⁾ Così ridotto il problema può essere studiato col valido sussidio della teoria delle funzioni di variabile complessa; Levi-Civita, *Scie e leggi di resistenza*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1907.

⁽³⁾ Mi riservo di far vedere in altra mia prossima Nota in qual modo si possano, dalle considerazioni generali che sto per esporre, dedurre alcuni casi particolari, assai caratteristici. Più precisamente mi propongo di porre allora in evidenza in qual modo si possa procedere ad una razionale analisi delle discontinuità che caratterizzano quei casi di efflusso nei quali si verifica il fenomeno del Venturi: fenomeno le cui applicazioni nel campo della pratica tecnica sono ormai tanto note quanto numerose.

semplicemente connessa, ed estendentesi all'infinito sia a monte che a valle, limitata ovunque da contorni rigidi, epperò dati, salvo che lungo un certo tratto finito, là dove il liquido in moto confina a pelo libero con un'altra regione B occupata da un fluido in quiete a pressione costante.

Supporremo le pareti rigide tali che il liquido possa scorrere lungo di esse mantenendosi ad esse ovunque aderente senza che per ciò la pressione discenda in alcun punto al di sotto di un valore opportunamente scelto.

Ammesse le notazioni indicate in figura ed assunta l'origine O sulla parete rigida $\omega_1 + \omega_2$ nel modo che più innanzi verrà definito, si prenda la direzione assintotica del moto verso valle come direzione positiva delle x , e come direzione positiva delle y la normale a quella, uscente da O, e rivolta verso il campo A.

Pur lasciando, pel momento, indeterminata l'unità di velocità, indicheremo fin d'ora con V_1 e V_2 le grandezze delle velocità assintotiche rispettivamente a monte ed a valle del movimento.

Dette pertanto, al solito, u_P e v_P le componenti parallele ai due assi coordinati della velocità in un punto P generico di A, riterremo che al tendere di P verso l'infinito *a valle* si abbia:

$$\begin{aligned}\lim u_P &= V_2 \\ \lim v_P &= 0\end{aligned}$$

mentre che al tendere di P verso l'infinito *a monte* sia:

$$\begin{aligned}\lim u_P &= V_1 \cos \alpha \\ \lim v_P &= V_1 \sin \alpha,\end{aligned}$$

α essendo l'angolo che la direzione della velocità assintotica a monte forma colla direzione positiva dell'asse x , misurato fra π e $-\pi$, positivamente nel verso che porta la direzione positiva dell'asse x a coincidere colla direzione positiva di y .

Converremo infine che il valore assoluto della velocità

$$V = \sqrt{u^2 + v^2}$$

sia in ogni punto di A diverso da zero, contorni compresi, eccezione fatta soltanto per gli eventuali punti angolosi (necessariamente concavi) delle pareti rigide, nei quali la velocità si annulla.

2. Per le ipotesi fatte debbono notoriamente esistere due funzioni $\varphi(x, y)$ e $\psi(x, y)$, potenziale di velocità e funzione di corrente, armoniche e regolari in A, definite rispettivamente dalle equazioni differenziali

$$\begin{aligned}d\varphi &= u dx + v dy \\ d\psi &= -v dx + u dy\end{aligned}$$

colle determinazioni $\varphi = \psi = 0$ nell'origine O. L'arbitrarietà che ci siamo riservata nella scelta di quest'origine ci permette ancora di imporre che il potenziale φ assuma valori eguali ed opposti φ^* e $-\varphi^*$ nei due punti P' e P'' di raccordo fra le pareti rigide μ_1 e μ_2 e la linea libera λ .

La funzione ψ invece deve assumere sui due rami del contorno $\varpi_1 + \varpi_2$ e $\mu_1 + \lambda + \mu_2$ valori costanti e, come è ben noto, diversi fra loro. Visto che deve essere

$$\psi = 0 \quad \text{in ogni punto di } \varpi_1 + \varpi_2$$

ed assunta π come misura della portata della vena liquida in moto, dovremo ritenere

$$\psi = \pi \quad \text{in ogni punto di } \mu_1 + \lambda + \mu_2.$$

Detta infine p la pressione del fluido in un punto generico di A occupato da una particella dotata della velocità V, e p_0 la pressione costante che si è supposta regnare in ogni punto di B e quindi di λ , e tenuto presente l'ultimo elemento di arbitrarietà che ancora ci resta nella scelta delle unità di misura, noi possiamo scrivere l'ultima condizione ai limiti imponendo

$$V = 1 \quad \text{in ogni punto di } \lambda$$

con che la relazione che compendia le equazioni idrodinamiche di Eulero assume la forma

$$p = p_0 + \frac{1}{2}(1 - V^2)$$

3. Posto al solito

$$z = x + iy$$

$$w = u - iv$$

$$f = \varphi + i\psi$$

con che w ed f risultano entrambe funzioni della variabile complessa z , legate dalla relazione

$$\frac{df}{dz} = w$$

si osservi che la relazione funzionale $f = f(z)$ permette di rappresentare in modo conforme il campo A del piano z sopra una striscia $0 < \psi < \pi$ del piano complesso f nel modo indicato dalla fig. 2.

Immaginando z espressa per f , la w , funzione di z uniforme e regolare in A, punto all'infinito compreso, può considerarsi come funzione di f finita e continua in tutti i punti della detta striscia.

Per $\psi = \pi$ e $-\varphi^* < \varphi < \varphi^*$ cioè sul segmento $f'f''$ del bordo superiore della striscia, immagine della linea libera λ , si ha

$$|w| = 1.$$

Se perciò si pone

$$w = e^{-i\omega}$$

convenendo che nel punto all'infinito a valle, là dove $w = V_2$, sia $\omega = i \log V_2$ (dove al logaritmo spetta il suo valore aritmetico), la funzione ω così definita risulta finita e continua in tutta la striscia considerata, bordi compresi, tranne che in corrispondenza dei punti immagini dei vertici della parete rigida, in prossimità dei quali $i\omega$ tende verso $+\infty$. Su $f'f''$, ω assume valori puramente reali.

Posto infine

$$\omega = \theta + i\tau$$

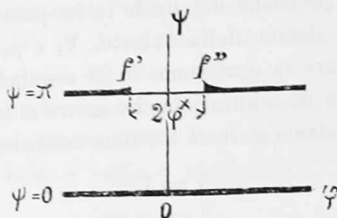


FIG. 2.

con θ e τ reali, si ha al solito

$$|w| = e^{-\tau}$$

$$\frac{u + iv}{V} = e^{i\theta},$$

τ è adunque il logaritmo naturale del valore assoluto della velocità nel punto generico di A ; θ è l'angolo che la direzione della velocità stessa forma colla direzione positiva dell'asse x , contato fra π e $-\pi$, positivamente nel verso $x \rightarrow y$, negativamente nel verso opposto.

4. È opportuno effettuare a questo punto un cambiamento di variabile che sostituisca alla striscia $0 < \psi < \pi$ del piano f un semicerchio il cui contorno corrisponda alle due rette limiti della striscia per modo che quella porzione $f'f''$ di una di esse che rappresenta la linea libera λ del piano z e sulla quale ω è risultato reale, venga a sua volta ad avere per immagine il diametro.

Lo scopo si può raggiungere ponendo successivamente:

$$e^f = F = \frac{b + Z}{b - Z}$$

con ⁽¹⁾

$$b = \frac{e^{\varphi^x} - 1}{e^{\varphi^x} + 1} = \cos \beta$$

e

$$Z = -\frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right)$$

o, più direttamente

$$f = \log \frac{b - \frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right)}{b + \frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right)} = \pi i + \log \frac{\zeta^2 - 2b\zeta + 1}{\zeta^2 + 2b\zeta + 1}.$$

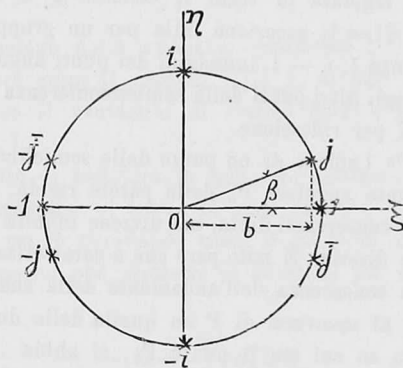


FIG. 3.

In tal guisa alla solita striscia del piano f , sulla quale avevamo rappresentato il campo A sede del moto, si viene a far corrispondere sul piano della nuova variabile $\zeta = \xi + i\eta$ il semicerchio $|\zeta| \leq 1$, $\eta \geq 0$ (fig. 3) per modo che:

il punto di affissa $j = e^{i\beta}$ rappresenta il punto all'infinito a monte del moto;

⁽¹⁾ La grandezza b che così si viene ad introdurre (o, ciò che fa lo stesso, l'angolo β che essa determina a meno dei soliti multipli di 2π) può, in un certo senso, assumersi come indice della maggiore o minore estensione della discontinuità. Ed inverso si può facilmente verificare che la lunghezza dell'arco $P'P''$ di linea libera è misurata da

$$2\varphi^x = 2 \log \frac{1+b}{1-b}.$$

Al tendere di b a zero o, ciò che fa lo stesso, al tender di β verso $\frac{\pi}{2}$, i due punti P'

l'arco di circonferenza $j, 1$ è immagine della parete rigida μ_1 ;
 il punto di affissa 1 rappresenta il punto di raccordo P' ;
 il diametro $1, -1$ è immagine della linea libera λ ;
 il punto di affissa -1 rappresenta il punto di raccordo P'' ;
 l'arco di circonferenza $-1, -\bar{j}$ è immagine della parete rigida μ_2 ;
 il punto di affissa $-\bar{j} = -e^{-i\beta}$ rappresenta il punto all'infinito a valle
 del moto;
 i due archi di circonferenza j, i ed $i, -\bar{j}$ sono rispettivamente imma-
 gini delle due porzioni ω_1 ed ω_2 dell'altra parete.

Se ora si osserva che la funzione ω , considerata come funzione della nuova variabile ζ , per essere regolare entro il semicerchio dato e reale sull'asse reale, può in virtù del principio di Schwarz, continuarsi per riflessione analitica nel semicerchio sottostante, si potranno studiare gli elementi così cinematici come geometrici ⁽¹⁾ del problema, analizzando il comportamento della funzione $\omega(\zeta)$ regolare in tutto il cerchio $|\zeta| < 1$, finita e continua sulla circonferenza $|\zeta| = 1$, eccezione fatta per un gruppo discreto di punti della semicirconferenza $1, i, -1$, immagini dei punti angolosi della parete rigida, nonché per quegli altri punti della semicirconferenza $1, -i, -1$ che si ottengono dai primi per riflessione.

5. Sia $\zeta_h = e^{i\sigma_h}$ l'affissa di un punto della semicirconferenza $1, i, -1$ immagine di un punto angoloso P_h della parete rigida. Per $\zeta = \zeta_h$ la funzione $\omega(\zeta)$ non può conservarsi finita, ma diviene infinita in modo non accessibile all'intuizione diretta. È noto però che a caratterizzare la natura della singolarità basta la conoscenza dell'andamento della sua parte reale; basta cioè l'imporre che, al muoversi di P su quella delle due linee di contorno del campo del moto su cui sta il punto P_h , si abbia

$$\begin{cases} \lim \theta = \theta'_h & \text{per } \zeta \text{ tendente a } \zeta_h \text{ lungo la porzione di contorno } j, \zeta_h \\ \lim \theta = \theta''_h & \text{per } \zeta \text{ tendente a } \zeta_h \text{ lungo la porzione di contorno } -\bar{j}, \zeta_h, \end{cases}$$

θ'_h e θ''_h essendo gli angoli che la tangente alla parete rigida immediatamente a monte ed a valle di P_h , prese nel senso del moto, formano colla direzione positiva dell'asse x .

e P'' si avvicinano indefinitamente. Per contro per $b = 1$ cioè per $\beta = 0$ l'arco di linea libera si estende indefinitamente così a monte che a valle del moto: si ricade allora, come caso particolare, in quello stesso problema di cui mi sono occupato nella citata mia Memoria.

⁽¹⁾ In particolare le immagini sul piano ζ delle linee di flusso $\psi = K$ del piano z sono *quartiche* aventi per equazione

$$4b\eta[1 - (\xi^2 + \eta^2)] = t_g K \{ 4b^2(\xi^2 + \eta^2) - (\xi^2 + \eta^2)^2 - 2(\xi^2 - \eta^2) - 1 \}.$$

Per contro in ogni punto del contorno immagine di un punto non angolare, $\theta(\zeta)$ deve riguardarsi come funzione continua dotata di derivata pure continua.

Detta pertanto θ_0 una particolare funzione armonica entro il cerchio $|\zeta| < 1$, simmetrica rispetto all'asse reale, soddisfacente a tutte le condizioni di discontinuità testè imposte, nonchè a quelle che ne derivano sulla semicirconferenza $1, -i, -1$ per riflessione, e detta τ_0 la sua associata (la costante additiva intendendosi presa in modo che τ_0 si annulli nell'origine) la funzione

$$\omega_0 = \theta_0 + i\tau_0$$

della variabile complessa ζ si mantiene reale sull'asse reale.

L'integrale generale del moto in questione può perciò scriversi sotto la forma

$$\omega = \omega_0 - \Omega,$$

Ω essendo una funzione della variabile complessa ζ , reale essa pure sull'asse reale, regolare entro il cerchio $|\zeta| < 1$, al pari di ω e di ω_0 , ma avente sopra di esse il vantaggio di restare finita e continua anche sulla circonferenza $|\zeta| = 1$.

Sulla possibilità di costruire, in ogni caso speciale, la funzione ω_0 , non è qui il caso di insistere; si tratta di cosa nota (1).

Termineremo perciò ricordando come il grado di arbitrarietà dell'integrale generale proposto, può mettersi in evidenza per mezzo della serie

$$\Omega = \sum_{n=0}^{n=\infty} c_n \zeta^n,$$

dove le c_n sono costanti reali legate dalle condizioni:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} c_n \cos n\sigma_n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n c_n e^{-in\beta} = \omega_0(-\bar{j}) - i \log V_2$$

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} c_n e^{in\beta} = \omega_0(j) - \alpha - i \log V_1.$$

(1) Cisotti, *Vene fluenti*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1908; ovvero: Memoria citata (1), § 13.