ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVIII.

1911

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XX.

1º SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1911

Matematica. — *L'equazione integrale di Volterra di seconda specie con un limite dell'integrale infinito.* Nota del dott. G. C. Evans, presentata dal Corrisp. G. Lauricella.

1. In una prima Nota su questo soggetto abbiamo considerato il piano xy come se l'infinito fosse un solo punto, cioè le nostre funzioni avevano sempre ciascuna un solo valore, indipendente dal modo secondo cui crescono i valori delle variabili. Nell'altro caso si può procedere in modo diretto, e dimostrare il teorema seguente:

Teorema 5. — *Nell'equazione*

$$(1)\qquad u(x) = \varphi(x) + \int_x^\infty K(x, \xi)\, u(\xi)\, d\xi$$

supponiamo che $\varphi(x)$ sia continua nel tratto $x \geqq a$, e finita in valore assoluto $< P_1$, e $K(x, \xi)$ sia continua nel campo $a \leqq x \leqq \xi$, e finita in valore assoluto $< P_2$, e che $\int_x^\infty |K(x, \xi)|\, d\xi$ esista per $x \geqq a$. Allora se può trovarsi un valore b tale che

$$\int_x^\infty |K(x, \xi)|\, d\xi \leqq N < 1 \qquad\qquad x \geqq b,$$

si avrà che esiste una soluzione dell'equazione, limitata, che vale per $x \geqq a$ (¹).

Non c'è nessun'altra soluzione finita e integrabile (²) *nel tratto $x \geqq a$.*

Si può scrivere un teorema più generale, ma si perdono così le proprietà dell'operatore

$$\int_x^\infty K(x, \xi) \} \qquad \{ d\xi,$$

cioè le proprietà le quali rappresentano l'estensione del campo di variabilità al piano non proiettivo.

(¹) La soluzione appartiene alla classe I di R. Baire.
(²) Integrabile nel senso di Riemann o di Lebesgue.

2. Il teorema enunciato può dimostrarsi ricorrendo ad un teorema di analisi data da Osgood [1]. Per questo poniamo

$$S_n(m, x) = \varphi(x) + \int_x^m K(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi +$$
$$+ \int_x^m d\xi\, K(x, \xi) \int_\xi^m K(\xi, \xi')\, \varphi(\xi')\, d\xi' + \cdots$$
$$\cdots + \int_x^m d\xi\, K(x, \xi) \int_\xi^m d\xi'\, K(\xi, \xi') \int_{\xi'}^m \cdots \int_{\xi^{(n-1)}}^m K(\xi^{(n-1)}, \xi^{(n)})\, \varphi(\xi^{(n)})\, d\xi^{(n)}$$

e poniamo quando esistono

$$S_n(x) \quad = \lim_{m=\infty} S_n(m, x)$$
$$S(m, x) = \lim_{n=\infty} S_n(m, x)$$
$$= \varphi(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \int_x^m d\xi\, K(x, \xi) \int_\xi^m d\xi'\, K(\xi, \xi') \int_\xi^m \cdots$$
$$\cdots \int_{\xi(n-1)}^m K(\xi^{(n-1)}, \xi^{(n)})\, \varphi(\xi^n)\, d\xi^{(n)},$$
$$S(x) \quad = \lim_{m=\infty} \left[\lim_{n=\infty} S_n(m, x)\right].$$

Lemma. Consideriamo una funzione qualunque $f(m, x)$ continua in x per un valore qualsiasi della m, che è finita, in valore assoluto $< Q$, e tale che

$$(\alpha) \quad \lim_{m=\infty} f(m, x) \text{ esiste, e} \qquad (\beta) \quad \lim_{\substack{m=\infty \\ m'>m}} \int_{x'}^{x_1} |f(m', x) - f(m, x)|\, dx = 0$$

uniformemente, quando $b \leqq x' \leqq x_1$, dove x_1 è un valore qualunque nel tratto $x \geqq b$ [2]. *Allora si ha che*

$$f_1(m, x) = \int_x^m K(x, \xi)\, f(m, \xi)\, d\xi$$

è una funzione dello stesso genere.

Infatti $f_1(m, x)$ è continua e finita in valore assoluto $< QN$. E inoltre

$$|f_1(m', x) - f_1(m, x)| \leqq \int_m^{m'} |K(x, \xi)\, f(m', \xi)|\, d\xi +$$
$$+ \int_x^m |K(x, \xi)|\, |f(m', \xi) - f(m, \xi)|\, d\xi$$
$$\leqq Q \int_m^{m'} |K(x, \xi)|\, d\xi + 2Q \int_{m_0}^m |K(x, \xi)|\, d\xi + P_2 \int_x^{m_0} |f(m', \xi) - f(m, \xi|\, d\xi.$$

[1] W. Osgood, *Funktionentheorie*, vol. I, pag. 519.

[2] Non vi è bisogno di questa ipotesi se si usano i concetti degli insiemi misurabili ma conviene non introdurre metodi non necessarî all'uopo.

Fissato un valore ε consideriamo un solo valore x e prendiamo m_0 tanto grande che si abbia

$$\int_{m_0}^{\infty} |\mathrm{K}(x\,,\xi)|\,d\xi \leqq \frac{\varepsilon}{4\mathrm{Q}}\,.$$

Poi prendiamo $m > m_0$ tanto grande che si abbia

$$\int_{x}^{m_0} |f(m'\,,x) - f(m\,,x)|\,dx \leqq \frac{\varepsilon}{4\mathrm{P}_2}\,.$$

Quindi si avrà

$$|f_1(m'\,,x) - f_1(m\,,x)| \leqq \varepsilon\,.$$

Cioè $\lim\limits_{m=\infty} f_1(m\,,x)$ esiste.

Si ha anche, essendo x' nel tratto $b \leqq x' \leqq x_1$, e x_1 un valore fisso,

$$\int_{x'}^{x_1} |f_1(m'\,,x) - f_1(m\,,x)|\,dx \leqq$$

$$\int_{x'}^{x_1} \left|\left\{ \int_{m}^{m'} \mathrm{K}(x\,,\xi)\,f(m'\,,\xi)\,d\xi + \int_{m_0}^{m} \mathrm{K}(x\,,\xi)\,(f(m'\,,\xi) - f(m\,,\xi))\,d\xi + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_{x}^{m_0} \mathrm{K}(x\,,\xi)\,(f(m'\,,\xi) - f(m\,,\xi))\,d\xi \right\}\right|\,dx$$

$$\leqq 3\mathrm{Q} \int_{x'}^{x_1} \left\{ \int_{m_0}^{m'} |\mathrm{K}(x\,,\xi)|\,d\xi \right\} dx + \mathrm{P}_2 \int_{x'}^{x_1} \left\{ \int_{x}^{m_0} |f(m'\,,\xi) - f(m\,,\xi)|\,d\xi \right\} dx$$

dove $m > m_0$. Preso m_0 tanto grande che sia

$$\int_{m_0}^{m'} |\mathrm{K}(x\,,\xi)|\,d\xi \leqq \frac{\eta}{6\mathrm{Q}(x_1 - b)}\,,$$

prendiamo $m > m_0$ tanto grande che si abbia

$$\int_{x}^{m_0} |f(m'\,,\xi) - f(m\,,\xi)|\,d\xi \leqq \frac{\eta}{2\mathrm{P}_2(x_1 - b)}\,.$$

Dunque si avrà

$$\int_{x'}^{x_1} |f_1(m'\,,x) - f_1(m\,,x)|\,dx \leqq \eta$$

la quale dimostra la desiderata convergenza uniforme.

Ma in questo modo si dimostra che tutti gli integrali che compaiono nella funzione $\mathrm{S}_n(m\,,x)$ sono delle funzioni $f(m\,,x)$ perchè $\varphi(x)$ è una tale funzione. E per conseguenza si ha che

$a)$ $$\mathrm{S}_n(x) = \lim_{m=\infty} \mathrm{S}_n(m\,,x) \text{ esiste,} \quad x \geqq b\,.$$

Inoltre segue dalla convergenza della serie $S(m, x)$ che

$$b) \qquad S(m, x) = \lim_{n=\infty} S_n(m, x) \text{ esiste,} \quad x \geqq b,$$

e dall' ineguaglianza

$$|S_n(m, x)| \leqq P_1[1 + N + N^2 + \cdots + N^{n+1}] \leqq P_1 \frac{1}{1-N}, \quad x \geqq b,$$

che la convergenza affermata di $S(m, x)$ è uniforme rispetto alla m. Quindi si ha dal teorema sopracitato di Osgood che

$$c) \qquad \begin{cases} S(x) = \lim\limits_{m=\infty} S(m, x) \text{ esiste,} & x \geqq b, \\ \lim\limits_{n=\infty} S_n(x) \text{ esiste e è eguale a } S(x), & x \geqq b. \end{cases}$$

3. Dalla forma della serie $S(m, x)$ si ha l'equazione

$$(2) \qquad \int_x^m K(x, \xi)\, S(m, \xi)\, d\xi = S(m, x) - \varphi(x),$$

e quindi dalla c),

$$(3) \qquad \lim_{m=\infty} \int_x^m K(x, \xi)\, S(m, \xi)\, d\xi \text{ esiste e è eguale a } S(x) - \varphi(x).$$

Ma il primo membro dell'equazione (3) può scriversi nella forma

$$\lim_{m=\infty} \int_x^\infty K(x, \xi)\, S(m, \xi)\, d\xi,$$

infatti si ha

$$\left| \int_x^\infty K(x, \xi)\, S(m, \xi)\, d\xi - \int_x^m K(x, \xi)\, S(m, \xi)\, d\xi \right| \leqq$$

$$\leqq \int_m^\infty |K(x, \xi)|\, |S(m, \xi)|\, d\xi \leqq \frac{P_1}{1-N} \int_m^\infty |K(x, \xi)|\, d\xi,$$

che per un valore fisso di x si può fare tanto piccola quanto ci piace, col prendere m abbastanza grande. E questa non è altro che

$$(4) \qquad \lim_{m=\infty} \left(\lim_{m_1=\infty} \int_x^{m_1} K(x, \xi)\, S(m, \xi)\, d\xi \right).$$

Per meglio esaminare quest' ultima funzione (4) sarà opportuno con un cambiamento nell'ordine di integrazione scriverla in un'altra forma. Infatti dalla formula

$$\int_x^m d\xi\, \mathrm{K}(x\,,\xi) \int_\xi^m \mathrm{K}(\xi\,,\xi')\, \varphi(\xi')\, d\xi' = \int_x^m d\xi'\, \varphi(\xi') \int_x^{\xi'} \mathrm{K}(x\,,\xi)\, \mathrm{K}(\xi\,,\xi')\, d\xi$$

si ha

$$\int_x^m d\xi\, \mathrm{K}(x\,,\xi) \int_\xi^m d\xi'\, \mathrm{K}(\xi\,,\xi') \int_{\xi'}^m \cdots \int_{\xi^{(n-1)}}^m \mathrm{K}(\xi^{(n-1)}\,,\xi^{(n)})\, \varphi(\xi^{(n)})\, d\xi^{(n)} =$$

$$= \int_x^m d\xi^{(n)}\, \varphi(\xi^{(n)}) \int_x^{\xi^{(n)}} d\xi\, \mathrm{K}(x\,,\xi) \int_\xi^{\xi^{(n)}} \cdots$$

$$\cdots \int_{\xi^{(n-3)}}^{\xi^{(n)}} \mathrm{K}(\xi^{(n-3)}\,,\xi^{(n-2)}) \int_{\xi^{(n-2)}}^{\xi^{(n)}} \mathrm{K}(\xi^{(n-2)}\,,\xi^{(n-1)})\, \mathrm{K}(\xi^{(n-1)}\,,\xi^{(n)})\, d\xi^{(n-1)}.$$

E si può scrivere

$$\mathrm{S}(m\,,x) = \varphi(x) - \int_x^m k'(x\,,\xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi \tag{5}$$

dove $k'(x\,,y)$, il nucleo dell'equazione risolvente di Volterra, è dato dalla formula

$$k'(x\,,y) = -\mathrm{K}(x\,,y) - \sum_{n=0}^{\infty} \int_x^y d\xi\, \mathrm{K}(x\,,\xi) \int_\xi^y d\xi'\, \mathrm{K}(\xi\,,\xi') \int_{\xi'}^y \cdots$$

$$\cdots \int_{\xi^{(n-1)}}^y \mathrm{K}(\xi^{(n-1)}\,,\xi^{(n)})\, \mathrm{K}(\xi^{(n)}\,,y)\, d\xi^{(n)}.$$

E siccome $x \leqq \xi \leqq \xi' \leqq \cdots \leqq \xi^{(n)} \leqq y$, si ha

$$|k'(x\,,y)| \leqq \frac{\mathrm{P}_2}{1-\mathrm{N}}.$$

Di più, essendo sempre uniforme la convergenza della serie in $x\,,y$, si ha

$$\int_x^m |k'(x\,,y)|\, dy \leqq \int_x^m |\mathrm{K}(x\,,y)|\, dy +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \int_x^m dy \int_x^y \cdots \int_{\xi^{(n-1)}}^y |\mathrm{K}(\xi^{(n-1)}\,,\xi^{(n)})|\, |\mathrm{K}(\xi^{(n)}\,,y)|\, d\xi^{(n)}$$

la quale, dopo avere usato l'inversa della trasformazione già fatta direttamente, si vede che è $\leqq \mathrm{N}/(1-\mathrm{N})$.

Per conseguenza l'integrale $\int_x^\infty |k'(x\,,\xi)|\, d\xi$ esiste, e la funzione

$$\int_x^m k'(x\,,\xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi$$

gode delle proprietà delle funzioni $f(m,x)$ dell'articolo (2). Perciò $\mathrm{S}(m\,,x)$

gode delle stesse proprietà. Inoltre siccome

$$\int_{x'}^{x_1} |K(x, \xi)|\,|S(m', \xi) - S(m, \xi)|\, d\xi \leqq P_2 \int_{x'}^{x_1} |S(m', x) - S(m, x)|\, dx\,,$$

si vede che

$$\lim_{m=\infty} \int_{x'}^{x_1} K(x, \xi)\, S(m, \xi)\, d\xi \qquad \begin{Bmatrix} a \leqq x \\ a \leqq x' \leqq x_1 \end{Bmatrix}$$

esiste.

Tornando ancora all'espressione (4) si ha che

$$(a) \qquad \lim_{m=\infty} \int_{x}^{m_1} K(x, \xi)\, S(m, \xi)\, d\xi \text{ esiste,}$$

$$(b) \qquad \lim_{m_1=\infty} \int_{x}^{m_1} K(x, \xi)\, S(m, \xi)\, d\xi \text{ esiste,}$$

e quest'ultimo uniformemente rispetto alla m; quindi applicando il teorema sopracitato di Osgood, si può nell'espressione (4) invertire l'ordine dei due limiti, e scriverla

$$(6) \qquad \lim_{m_1=\infty} \left[\lim_{m=\infty} \int_{x}^{m_1} K(x, \xi)\, S(m, \xi)\, d\xi \right].$$

Ma $\lim_{m=\infty} \int_{x}^{m_1} K(x, \xi)\, S(m, \xi)\, d\xi$ non è altro che $\int_{x}^{m_1} K(x, \xi)\, S(\xi)\, d\xi$ dove l'integrale è l'integrale di Lebesgue (¹). Perciò si ha dalla (3)

$$\int_{x}^{\infty} K(x, \xi)\, S(\xi)\, d\xi = S(x) - \varphi(x)$$

e quindi $S(x)$ è soluzione dell'equazione (1).

4. Supponiamo che esista un'altra soluzione $u(x)$, limitata, e integrabile nel senso di Riemann o di Lebesgue (²). Si ha che la differenza,

(¹) Per dare una definizione abbastanza generale dell'integrale non bisogna allontanarsi dai metodi delle funzioni continue. Data una funzione $f(x)$ supponiamo che possa trovarsi una serie di funzioni $f_n(x)$ continue, finite in valore assoluto $< M$, tale che $\lim_{n=\infty} f_n(x) = f(x)$. Allora si definisca $\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n=\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx$. Che l'integrale è unicamente determinato segue dal fatto che se $f(x)$ è anche continua si ha come teorema la sopra data definizione (Osgood, *On the non uniform convergence*, Amer. Journal of Math. 1897). Quindi la differenza di due tali rappresentazioni avrà lo zero come limite dell'integrale.

La definizione qui data compare come caso speciale di un teorema di H. Lebesgue (*Leçons sur l'integration*, pag. 114).

(²) O nel senso più generale di una definizione che soddisfa le prime cinque condizioni di Lebesgue, ma non necessariamente l'ultima (vedi pag. 98, *Leçons sur l'integration*).

$v(x) = u(x) - S(x)$, è finita, integrabile, e soluzione dell'equazione omogenea

$$v(x) = \int_x^\infty K(x, \xi)\, v(\xi)\, d\xi \,.$$

Quindi l'integrale $\int_x^\infty K(x, \xi)\, v(\xi)\, d\xi$ è limitato e integrabile e si ha

$$v(x) = \int_x^\infty d\xi\, K(x, \xi) \int_\xi^\infty K(\xi, \xi')\, v(\xi')\, d\xi'$$

e nello stesso modo

$$v(x) = \int_x^\infty d\xi\, K(x, \xi) \int_\xi^\infty d\xi'\, K(\xi, \xi') \int_{\xi'}^\infty \cdots \int_{\xi^{(n-1)}}^\infty K(\xi^{(n-1)}, \xi^{(n)})\, v(\xi^{(n)})\, d\xi^{(n)} \,.$$

Per conseguenza $|v(x)| \leqq \text{cost.}\, N^{n+1}$, per n qualsiasi, il che dice che $v(x)$ deve essere dappertutto zero per $x \geqq b$.

5. Si è dimostrato che esiste una e una sola soluzione limitata e integrabile nel tratto $x \geqq b$. Per completare il teorema bisogna dimostrare che la stessa proprietà vale per il tratto $x \geqq a$. Questo si fa senza difficoltà, scrivendo l'equazione (1) nella forma

$$u(x) = \psi(x) + \int_x^b K(x, \xi)\, u(\xi)\, d\xi \,,$$

che è un'equazione col limite dell'integrale finito, dove la funzione

$$\psi(x) = \varphi(x) + \lim_{m=\infty} \int_b^m K(x, \xi)\, u(\xi)\, d\xi$$

è conosciuta, per $x \leqq b$, per mezzo della soluzione già ottenuta per $x \geqq b$. Le discontinuità della funzione $\psi(x)$ si possono trattare facendo uso del ragionamento degli articoli 3 e 4 [1], e per mezzo di questo si può dimostrare che *la soluzione dell'equazione* (1) *può essere scritta nella forma*

$$u(x) = \varphi(x) - \int_x^\infty k'(x, \xi)\, u(\xi)\, d\xi \,,$$

una forma che vale dunque per $x \geqq a$. *Il nucleo di questa equazione risolvente è continuo.*

[1] La convergenza della serie sarà del tipo $\Sigma \frac{M^\lambda}{i!}$ invece di $\Sigma N^\lambda, N < 1$.