ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVIII.

1911

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1911

Geodesia. — *Sulle rappresentazioni isodromiche.* Nota di Corradino Mineo, presentata dal Corrisp. A. Venturi.

Il prof. Venturi (¹) ha chiamato *isodromica* una rappresentazione di una superficie S su di un'altra S′, che, senza essere conforme, conserva le *lossodromiche*, cioè trasforma ogni traiettoria isogonale d'una delle famiglie di linee coordinate della S, per es. delle $v =$ *costante*, in una traiettoria isogonale delle curve corrispondenti alle $v =$ *costante* sulla S′. Il Venturi ha mostrato in qual modo si possa soddisfare alle condizioni d'isodromia in un caso particolare, del resto molto ampio e interessante. È però possibile risolvere la questione in modo affatto generale: il che ci proponiamo di fare in questa breve Nota, sia per le importanti proprietà angolari di queste rappresentazioni, già messe in rilievo dal prof. Venturi, sia ancora perchè esse costituiscono una notevole generalizzazione delle rappresentazioni conformi.

1. Supponiamo di riferire la superficie S a un sistema isotermo (u, v), che dia all'elemento lineare la forma

$$ds^2 = \lambda(du^2 + dv^2). \tag{1}$$

Similmente la S′ sia riferita a un sistema isotermo (u', v'), in modo che si abbia

$$ds'^2 = \lambda'(du'^2 + dv'^2). \tag{2}$$

La nostra rappresentazione della S su S′ sarà analiticamente espressa dalle formole

$$u' = u'(u, v) \quad , \quad v' = v'(u, v). \tag{3}$$

Per mezzo di queste la (2) diviene

$$ds'^2 = \mathrm{E}\, du^2 + 2\,\mathrm{F}\, du\, dv + \mathrm{G}\, dv^2, \tag{4}$$

dove E, F, G sono funzioni di u e v, date dalle formole

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{E} &= \lambda' \left[\left(\frac{\partial u'}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial u}\right)^2\right], \\ \mathrm{F} &= \lambda' \left[\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial u'}{\partial v} + \frac{\partial v'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial v}\right], \\ \mathrm{G} &= \lambda' \left[\left(\frac{\partial u'}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial v}\right)^2\right]. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

(¹) A. Venturi, *Sopra alcune proprietà rappresentative degli angoli e sulla proiezione isodromica.* Rivista geografica italiana, Firenze, 1898, fasc. IX-X, pp. 35-37.

Chiamando θ l'angolo che una curva qualunque di S forma con le $v =$ *costante*, abbiamo da una nota formola:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{dv}{du}. \tag{6}$$

E per il corrispondente angolo θ' sulla S':

$$\operatorname{tg}\theta' = \sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}\,\frac{dv}{\mathrm{E}\,du + \mathrm{F}\,dv}. \tag{7}$$

Introduciamo ora l'angolo ω delle linee u e v della S' (corrispondenti alle omonime della S), e i *moduli di deformazione lineare* (¹) m_u e m_v, relativi alle linee u e v di S; abbiamo:

$$\left\{\begin{aligned} &\cos\omega = \frac{\mathrm{F}}{\sqrt{\mathrm{EG}}} \quad , \quad \sin\omega = \frac{\sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}}{\sqrt{\mathrm{EG}}} ; \\ &m_u = \sqrt{\frac{\mathrm{G}}{\lambda}} \quad , \quad m_v = \sqrt{\frac{\mathrm{E}}{\lambda}} . \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Allora la (7) si può scrivere

$$\operatorname{cotg}\theta' = \frac{m_v}{m_u}\operatorname{cosec}\omega\operatorname{cotg}\theta + \operatorname{cotg}\omega \ \text{(²)}. \tag{9}$$

Ora affinchè la rappresentazione conservi le lossodromiche, occorre e basta che per ogni $\theta =$ costante, anco θ' si riduca a una costante, e perciò è necessario e sufficiente porre, essendo h e k due costanti:

$$\operatorname{tg}\omega = h \quad , \quad \frac{m_v}{m_u} = \mathrm{k} \ \text{(³)}; \tag{10}$$

ossia per le (5), (8):

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\dfrac{\partial u'}{\partial u}\dfrac{\partial v'}{\partial v} - \dfrac{\partial u'}{\partial v}\dfrac{\partial v'}{\partial u}}{\dfrac{\partial u'}{\partial u}\dfrac{\partial u'}{\partial v} + \dfrac{\partial v'}{\partial u}\dfrac{\partial v'}{\partial v}} = \pm h, \\ &\frac{\left(\dfrac{\partial u'}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial v'}{\partial u}\right)^2}{\left(\dfrac{\partial u'}{\partial v}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial v'}{\partial v}\right)^2} = k^2 . \end{aligned}\right. \tag{11}$$

(¹) Vedi, per es., Pizzetti, *Trattato di Geodesia teoretica*. Bologna, Zanichelli, 1905, pag. 361.

(²) Cfr. Venturi, loc. cit., pag. 35.

(³) La necessità della condizione $\omega =$ costante è evidente *a priori*.

Il sistema (11) si trasforma senza difficoltà in quest'altro

$$(12)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u'}{\partial u} = \mp \dfrac{1}{h} \dfrac{\partial v'}{\partial u} + k \dfrac{\sqrt{1+h^2}}{h} \dfrac{\partial v'}{\partial v}\,, \\[2ex] \dfrac{\partial v'}{\partial u} = \pm \dfrac{1}{h} \dfrac{\partial u'}{\partial u} - k \dfrac{\sqrt{1+h^2}}{h} \dfrac{\partial u'}{\partial v}\,. \end{cases}$$

E cambiando le variabili u e v nelle nuove α e β, per mezzo della sostituzione

$$(13)\qquad \begin{cases} \alpha = ku \pm \dfrac{v}{\sqrt{1+h^2}}\,, \\[2ex] \beta = \pm \dfrac{hv}{\sqrt{1+h^2}}\,; \end{cases}$$

le (12) diventano

$$(14)\qquad \frac{\partial u'}{\partial \alpha} = \pm \frac{\partial v'}{\partial \beta}\,, \quad \frac{\partial u'}{\partial \beta} = \mp \frac{\partial v'}{\partial \alpha}\,;$$

il che vuol dire che $u' + iv'$ è funzione della variabile complessa

$$(15)\qquad \alpha \pm i\beta = ku \pm \frac{1 \pm hi}{\sqrt{1+h^2}}\, v\,,$$

la quale si può anco scrivere, per la 1ª delle (10):

$$(16)\qquad \alpha \pm i\beta = ku + e^{\pm i\omega} v\,.$$

Di qui il seguente

Teorema. — *Essendo* (u, v) *e* (u', v') *due sistemi isotermi risp. sulle superficie* S *e* S', *la più generale rappresentazione isodromica di* S *su* S' *si ottiene ponendo*

$$(17)\qquad u' + iv' = \Phi(ku + e^{\pm i\omega} v)\,,$$

dove Φ *è il simbolo di una funzione arbitraria.*

Le costanti ω e k hanno, per la rappresentazione, i significati geometrici indicati dalle (8), (10).

Per $k = 1$, $\omega = 90°$, la rappresentazione è conforme, e il teorema precedente si riduce a quello notissimo di Gauss.

Per $\omega = 90°$ e $k \gtrless 1$, abbiamo il caso trattato dal prof. Venturi.

Notiamo infine che, supposto $k = 1$, la (17) si può anco tradurre nel seguente teorema, già trovato dal Beltrami: *Se* u' *e* v' *sono parametri isometrici di una superficie* S', *eguagliando il binomio* $u' + iv'$ *a una qualunque funzione di* $u + e^{i\omega} v$, *si ottengono due sistemi di curve* $u =$ cost,

$v = \text{cost}$ *di* S', *che si tagliano dappertutto sotto l'angolo costante* ω (¹). Resta inoltre dimostrata, per la (16) e per la 2ª delle (13), l'osservazione fatta dal Beltrami, *che le curve del sistema* $v = \text{cost}$ *sono, per una stessa funzione* Φ *di* $u + e^{i\omega}v$, *indipendenti dall'angolo* ω, e che quindi da una stessa funzione Φ si deduce un sistema di curve v, accompagnato dai sistemi delle sue traiettorie sotto tutti gli angoli possibili (²).

2. In virtù della (17), la (4) diviene:

$$ds'^2 = \lambda' |\Phi'|^2 \{ k^2\, du^2 + 2\, k \cos\omega\, du\, dv + dv^2 \} . \tag{18}$$

E quindi per il *modulo di deformazione lineare* di un elemento ds della superficie S, formante l'angolo θ con le linee $v = \text{cost}$, abbiamo:

$$m^2 = \frac{\lambda'}{\lambda} |\Phi'|^2 \{ k^2 \cos^2\theta + k \cos\omega \sin 2\theta + \sin^2\theta \} . \tag{19}$$

Da questa segue che le direzioni dei due elementi lineari di S ai quali compete il massimo e il minimo modulo di deformazione, son date dai valori di θ che soddisfanno all'equazione

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2k \cos\omega}{k^2 - 1} ; \tag{20}$$

e i corrispondenti valori di m (*moduli principali*) sono

$$\begin{aligned} m_1^2 &= \frac{1}{2} \frac{\lambda_1}{\lambda} |\Phi'|^2 \left\{ 1 + k^2 + \sqrt{(1-k^2)^2 + 4k^2 \cos^2\omega} \right\} , \\ m_2^2 &= \frac{1}{2} \frac{\lambda_1}{\lambda} |\Phi'|^2 \left\{ 1 + k^2 - \sqrt{(1-k^2)^2 + 4k^2 \cos^2\omega} \right\} . \end{aligned} \tag{21}$$

La (20) mostra che gli angoli formati con le linee v dalle direzioni di massima o minima deformazione lineare, sono costanti per tutti i punti di S, e quindi le linee di massima e minima deformazione lineare costituiscono sulla S un doppio sistema (ortogonale) di lossodromiche, cui corrisponde sulla S' un altro doppio sistema (ortogonale) di lossodromiche.

Per il caso particolare $k = 1$, e per $\omega \gtreqless 90°$, si vede che le linee di massima e minima deformazione lineare sono, sulla S, le traiettorie a 45° delle linee v (o u).

Dalle (21), poi, segue che per ogni punto di S è costante il rapporto $\frac{m_1}{m_2}$ dei moduli principali lineari.

(¹) Beltrami, *Delle variabili complesse sopra una superficie qualunque.* Opere matematiche, Hoepli, t. I (1902), pag. 329.

(²) Beltrami, *Ibidem*, pag. 329.

Sarebbe poi facile dimostrare, date le (20) e (21), che la massima e la minima proiezione su S' di uno stesso angolo $\triangle$ di S restano costanti, al variare dell'orientazione di $\triangle$, qualunque sia il punto di S; e corrispondono a due orientazioni di $\triangle$ pure indipendenti dal punto considerato. In generale è costante intorno a ogni punto di S ogni circostanza angolare, rispetto alla rappresentazione [1].

Matematica — *Sulle funzioni implicite.* Nota del dott. L. Orlando, presentata dal Corrisp. A. Di Legge.

Data l'equazione $f(x, y) = 0$, si può in molti casi dedurne una funzione continua $y = \varphi(x)$ della variabile x, che abbia per derivata

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y} . \tag{1}$$

È molto naturale domandarsi in quali casi ciò avvenga: ma una precisa risposta non è così facile a formularsi come la domanda.

Intanto una condizione indispensabile è che esista almeno un punto a, b, tale che sia $f(a, b) = 0$. Per esempio, l'equazione $e^{x+y} = 0$ non potrà mai definire una funzione y della variabile x.

Una condizione, sufficiente insieme con $f(a, b) = 0$, affinchè in un adeguato intorno di a, b esista la $y = \varphi(x)$ e possa anche scriversi la (1), è che esistano le due derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ e siano continue in ogni punto dell'intorno, e che inoltre la derivata $\frac{\partial f}{\partial y}$ vi si mantenga di segno invariabile.

Tale condizione è data in eccellenti trattati d'analisi; per non citare altri, citerò i trattati di Genocchi-Peano e di Baire, nei quali scienza e buon senso mirabilmente si conciliano, e citerò l'ultima edizione del trattato di Jordan, circa la quale l'illustre autore potrebbe senza immodestia riferire il verso di Orazio: *exegi monumentum aere perennius.*

Io voglio, con osservazioni in parte note ed in parte facilmente deducibili, ampliare tale condizione; e poi accennerò inoltre ad un'idea, che potrà prestarsi, io credo, ad un largo svolgimento.

Supponiamo che $f(a, b)$ sia zero, e poi supponiamo che esista un rettangolo $(\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_1; \alpha_2, \beta_2; \alpha_1, \beta_2)$, orientato secondo gli assi x, y, avente a, b come punto interno, e tale che in ogni suo punto, per ogni x fisso, la funzione $f(x, y)$ della variabile y sia continua e crescente; poi ag-

[1] Cfr. Venturi, loc. cit., pp. 35-36.