ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVIII.

1911

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XX.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1911

Sarebbe poi facile dimostrare, date le (20) e (21), che la massima e la minima proiezione su S′ di uno stesso angolo $\triangle$ di S restano costanti, al variare dell'orientazione di $\triangle$, qualunque sia il punto di S; e corrispondono a due orientazioni di $\triangle$ pure indipendenti dal punto considerato. In generale è costante intorno a ogni punto di S ogni circostanza angolare, rispetto alla rappresentazione [1].

Matematica — *Sulle funzioni implicite*. Nota del dott. L. Orlando, presentata dal Corrisp. A. Di Legge.

Data l'equazione $f(x, y) = 0$, si può in molti casi dedurne una funzione continua $y = \varphi(x)$ della variabile x, che abbia per derivata

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y}. \tag{1}$$

È molto naturale domandarsi in quali casi ciò avvenga: ma una precisa risposta non è così facile a formularsi come la domanda.

Intanto una condizione indispensabile è che esista almeno un punto a, b, tale che sia $f(a, b) = 0$. Per esempio, l'equazione $e^{x+y} = 0$ non potrà mai definire una funzione y della variabile x.

Una condizione, sufficiente insieme con $f(a, b) = 0$, affinchè in un adeguato intorno di a, b esista la $y = \varphi(x)$ e possa anche scriversi la (1), è che esistano le due derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ e siano continue in ogni punto dell'intorno, e che inoltre la derivata $\frac{\partial f}{\partial y}$ vi si mantenga di segno invariabile.

Tale condizione è data in eccellenti trattati d'analisi; per non citare altri, citerò i trattati di Genocchi-Peano e di Baire, nei quali scienza e buon senso mirabilmente si conciliano, e citerò l'ultima edizione del trattato di Jordan, circa la quale l'illustre autore potrebbe senza immodestia riferire il verso di Orazio: *exegi monumentum aere perennius*.

Io voglio, con osservazioni in parte note ed in parte facilmente deducibili, ampliare tale condizione; e poi accennerò inoltre ad un'idea, che potrà prestarsi, io credo, ad un largo svolgimento.

Supponiamo che $f(a, b)$ sia zero, e poi supponiamo che esista un rettangolo $(\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_1; \alpha_2, \beta_2; \alpha_1, \beta_2)$, orientato secondo gli assi x, y, avente a, b come punto interno, e tale che in ogni suo punto, per ogni x fisso, la funzione $f(x, y)$ della variabile y sia continua e crescente; poi ag-

[1] Cfr. Venturi, loc. cit., pp. 35-36.

giungiamo l'ipotesi che, sul lato $y = \beta_1$, la funzione $f(x, \beta_1)$ della variabile x conservi inalterato il suo segno, e che la funzione $f(x, \beta_2)$ della variabile x conservi, sul lato $y = \beta_2$, anch'essa inalterato il suo segno.

La condizione che $f(x, y)$ sia, per ogni x fisso (dunque, in particolare, per $x = a$), una funzione crescente della variabile y, ci assicura che $f(a, \beta_1)$ è inferiore ad $f(a, b)$, e quindi è negativa, e che $f(a, \beta_2)$, superando $f(a, b)$, è positiva. Ma questi due segni debbono mantenersi invariati sui lati $y = \beta_1$, $y = \beta_2$; dunque, se ξ è una qualsivoglia ascissa fra α_1 ed α_2, sarà $f(\xi, \beta_1) < 0$, $f(\xi, \beta_2) = 0$. Ma allora basta riferirsi alla supposta continuità della funzione $f(\xi, y)$ della variabile y, per vedere che esiste un η (unico, perchè tale funzione è crescente), il quale verifica la relazione $f(\xi, \eta) = 0$.

Notiamo che le ipotesi fatte sulla $f(x, y)$ sono abbastanza ampie; alquanto più restrittive sono le condizioni che imporremo ad $f(x, y)$ affinchè $y = \varphi(x)$ risulti continua. Aggiungendo alle precedenti ipotesi quella che $f(x, y)$ sia continua in ogni punto x, y del campo, dedurremo la continuità di $y = \varphi(x)$.

Supponiamo, per assurdo, che $\varphi(x)$ non sia continua per $x = \xi$; sia η la y relativa a questo valore di x. Allora, scelto un opportuno numero positivo ε, debbono sempre esistere, nelle più immediate vicinanze di ξ, valori x tali che le relative y abbiano da η una differenza non inferiore ad ε. Siano x_1 (che supporremo differente da ξ meno di 1), x_2 (che supporemo differente da ξ meno di $\frac{1}{2}$), x_3 (differente da ξ meno di $\frac{1}{3}$), ecc., siffatte ascisse, alle quali dunque corrisponderanno le ordinate $y_1, y_2, y_3, \ldots$, differenti da η non meno di ε. Questo insieme di infiniti valori $y_1, y_2, y_3, \ldots$, appartenenti all'intervallo finito (β_1, β_2), ammette qualche valore limite: sia ζ un valore limite. Questo valore limite ζ avrà nelle sue immediate vicinanze valori y_n con indice n arbitrariamente alto, corrispondenti a valori x_n arbitrariamente vicini a ξ $\left(x_n \text{ dista da } \xi \text{ meno di } \frac{1}{n}\right)$. Ma $f(x_n, y_n)$ è zero; dunque il numero fisso $f(\xi, \zeta)$ si dovrà ritenere, per la continuità di $f(x, y)$, arbitrariamente vicino a zero; tale proprietà non compete ad altro numero fisso che a zero: dunque sarà $f(\xi, \zeta) = 0$. Ma $f(\xi, y) = 0$ definisce η: dunque sarà $\zeta = \eta$. Questo risultato è assurdo, perchè le y_n, che stanno nelle immediate adiacenze del valore limite ζ, debbono invece mantenere da η un distacco non inferiore al numero fisso ε.

La continuità di $y = \varphi(x)$ in ogni valore ξ dell'intervallo (α_1, α_2) resta in tale modo provata [1]. Circa la derivabilità dobbiamo aggiungere

[1] In una breve conversazione che ebbi nella scorsa estate col Bagnera, egli mi parlò di questi argomenti; non credo di avere qui riferito ciò che egli mi disse, ma certamente le idee che ho qui svolte sull'esistenza e sulla continuità di $y = \varphi(x)$ non sono molto lontane da quelle che volle indicarmi l'illustre scienziato.

altre ipotesi. Intanto supponiamo che $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ esistano, e che inoltre sia $\frac{\partial f}{\partial y} > 0$.

Per metterci in un primo caso, vogliamo supporre che esista una successione (convergente a zero) di incrementi Δx della variabile x, ai quali corrisponda sempre $\Delta y = 0$. Allora, osservando che sulla curva $y = \varphi(x)$ valgono le relazioni $f(x, y) = 0$, $f(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0$, noi possiamo, per tutti questi valori, sostituire $f(x + \Delta x, y)$ ad $f(x + \Delta x, y + \Delta y)$, e scrivere $f(x + \Delta x, y) - f(x, y) = 0$, o anche

$$\frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = 0;$$

dunque troviamo $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$. Se poi ad *ogni* successione di Δx convergente a zero corrispondono Δy nulli, allora risulta senz'altro valida la (1).

In un secondo caso, noi supponiamo che Δy sia (per Δx sufficientemente piccolo) sempre diverso da zero, e scriviamo identicamente:

$$(2) \qquad \frac{f(x + \Delta x, x + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)}{\Delta x} \Delta x + \\ + \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \Delta y = 0$$

$$(3) \qquad \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \Delta x + \\ + \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)}{\Delta y} \Delta y = 0,$$

dove i punti x, y; $x + \Delta x, y + \Delta y$ appartengono alla curva $y = \varphi(x)$. Basta aggiungere alle precedenti ipotesi una di queste due: o la continuità di $\frac{\partial f}{\partial x}$ rispetto ad y, o la continuità di $\frac{\partial f}{\partial y}$ rispetto ad x, per dedurre subito la (1).

Se poi ci troviamo in un caso intermedio, che esista cioè *qualche* successione di Δy tutti nulli e *qualche altra* di Δy tutti diversi da zero, allora, procedendo come nel secondo caso su questa seconda successione [1], stabiliremo la (1), e, procedendo come nel primo caso sulla prima successione, verremo a conoscere il valore di $\frac{\partial f}{\partial x}$ (che risulterà nulla).

[1] Si ammette qui, beninteso, che esistano $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$, e che una delle due sia continua rispetto all'altra variabile, e che sia $\frac{\partial f}{\partial y} > 0$.

Tenendoci su questa via, di volere, nello studio della curva $y = \varphi(x)$, far intervenire *tutta* la funzione di x, y, mediante la quale è definita, ben poco potremmo estendere le condizioni finora imposte, e ben poca luce potremmo avere sull'importante questione di conoscere quanto si stacchino tali condizioni *sufficienti* dall'essere *necessarie*. Faremo dunque capo a un'altra considerazione.

Sia $F(x, y)$ una funzione che non verifica le condizioni ora indicate. Cerchiamo una funzione $f(x, y)$ che abbia gli stessi zeri di $F(x, y)$ e che invece verifichi tali condizioni. Evidentemente la funzione $y = \varphi(x)$, se esiste come conseguenza di $F(x, y) = 0$, potrà essere studiata sulla $f(x, y)$ piuttosto che sulla $F(x, y)$. Si presenta dunque il problema di cercare $f(x, y)$, cioè di cercare una funzione, che abbia gli stessi zeri di $F(x, y)$, e che sia, rispetto alle condizioni che qui ci importano, più regolare della $F(x, y)$.

La più desiderabile funzione sarebbe $y - \varphi(x)$; ma sarebbe anche una ingenuità pensare di dedurla con un metodo generale da $F(x, y)$. Sarà, invece, opportuno fare un esame diretto delle irregolarità di $F(x, y)$, e cercare una funzione $K(x, y)$, sia pure irregolarissima, che, moltiplicata per $F(x, y)$, lasci ottenere un prodotto $f(x, y) = F(x, y)\,K(x, y)$ più regolare di $F(x, y)$. Sarà indispensabile, peraltro, che tale funzione $K(x, y)$, che possiamo chiamare correttiva, non si annulli e non diventi infinita nel campo. Per esempio, se F ha un salto da $\varrho \neq 0$ a $\sigma \neq 0$, noi daremo a K un salto da $\frac{\lambda}{\varrho}$ a $\frac{\lambda}{\sigma}$, dove λ rimane ancora arbitrario. L'idea fondamentale di quest'artifizio (destinato a correggere le irregolarità di F), il quale in molti casi d'immediata pratica mi è riuscito utile [1], è quella di cointeressare il meno possibile colla curva $y = \varphi(x)$ le sue adiacenze; se i punti d'irregolarità di F sono a distanza finita dalla curva, allora la regolarizzazione è teoricamente fittizia, sebbene possa in alcuni casi far comodo (se non altro per diminuire il numero dei rettangoli da considerare); ma se i punti di irregolarità si addensassero nelle più immediate adiacenze della curva $y = \varphi(x)$, allora noi, pur senza conoscere esattamente l'ubicazione di questa curva, potremmo liberarla, non certamente dalle irregolarità sue proprie, ma da fastidiosi vicini.

[1] È un grossolano errore quello di credere che le funzioni utili in pratica siano le più facilmente trattabili; per esempio, nella lettura comparativa dei diagrammi sperimentali, bisogna, se si vuol procedere con coscienza, largamente sfruttare quella *microscopìa* analitica, che oggi, per malinteso spirito di comodità, si suole da molti proclamare inutile.