ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVIII.

1911

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XX.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1911

Matematica. — *Sulla dimostrazione elementare del teorema di Hurwitz*. Nota del dott. L. ORLANDO, presentata dal Corrispondente G. LAURICELLA.

In una precedente Nota, che fu presentata nell'ottobre 1910 a questa illustre Accademia, io dimostrai per via elementare il teorema di Hurwitz, relativo alle parti reali delle radici di un'equazione algebrica. Mi sia permesso ritornare su tale dimostrazione, per precisarne alcuni punti.

Sia

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n \tag{1}$$

un polinomio di grado n nella variabile x. Noi supponiamo che sia $a_0 = 1$, e che gli altri coefficienti siano numeri reali positivi. Formiamo il determinante

$$D_{n-1} = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & . & . & 0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & a_{n-2} & a_{n-3} \\ 0 & 0 & 0 & . & . & a_n & a_{n-1} \end{vmatrix} \tag{2}$$

e chiamiamo genericamente D_ν il determinante ottenuto dagli elementi comuni alle prime ν linee ed alle prime ν colonne.

Il teorema dice: condizione necessaria e sufficiente affinchè $f(x) = 0$ abbia soltanto negative le parti reali delle sue eventuali radici complesse è che sia positivo ogni elemento della catena $D_1, D_2, \ldots, D_{n-1}$.

Il principale artifizio della dimostrazione era quello di stabilire le due formule

$$D_{\nu-1} \Delta_{\nu+1} = \Delta_{\nu-1} D_{\nu+1} + r D_\nu \Delta_\nu, \tag{3}$$

$$\Delta_{\nu-1} \Theta_{\nu+1} = \Theta_{\nu-1} \Delta_{\nu+1} + r' \Delta_\nu \Theta_\nu . \tag{4}$$

le quali furono chiaramente e semplicemente stabilite.

Facilmente si stabilì anche la formula

$$D_{n-1} = (r_1 + r_2)(r_1 + r_3) \ldots (r_1 + r_n) \ldots\ldots (r_{n-1} + r_n), \tag{5}$$

che ci è utile richiamare.

Non altrettanto precise erano le altre considerazioni. Fine molto modesto del presente lavoro è quello di presentare più chiaramente la dimostrazione, che mancherebbe al suo scopo se si prestasse a critiche, sia pure facilmente riparabili.

Consideriamo il rapporto $\frac{\Delta_2}{\Delta_1}$. Noi possiamo scrivere

$$\frac{\Delta_2}{\Delta_1}=\frac{(a_1+a_0r)(a_2+a_1r)-a_0(a_3+a_2r)}{a_1+a_0r}=a_2+a_1r-\frac{a_0a_3+a_0a_2r}{a_1+a_0r}=$$

$$a_2+a_1r-\frac{a_1a_2+a_0a_2r}{a_1+a_0r}+\frac{a_1a_2-a_0a_3}{a_1+a_0r}=a_1r+\frac{D_2}{a_1+a_0r}.$$

Supponendo positivo D_2, e positiva la parte reale di r, ne viene di conseguenza che è positiva la parte reale del rapporto $\frac{\Delta_2}{\Delta_1}$ (è quasi superfluo rammentare che il segno della parte reale del numero complesso $\frac{1}{x+iy}$ è il segno di x).

Ammettiamo che fino a $k=\nu-1$ siasi verificato che il rapporto $\frac{\Delta_{k+1}}{\Delta_k}$ è un numero con parte reale positiva (è chiaro, da ciò, che Δ_ν è diverso da zero). Scrivendo la (3) come segue:

$$D_{\nu-1}\frac{\Delta_{\nu+1}}{\Delta_\nu}=D_{\nu+1}\frac{\Delta_{\nu-1}}{\Delta_\nu}+rD_\nu, \tag{6}$$

e supponendo i D positivi, ne viene, senz'altro, che positiva risulta la parte reale di $\frac{\Delta_{\nu+1}}{\Delta_\nu}$. Il criterio d'induzione stabilisce, dunque, che tali rapporti hanno tutti la parte reale positiva. E allora, scrivendo la (4) in quest'altro modo:

$$\frac{\Delta_{\nu-1}}{\Delta_\nu}\Theta_{\nu+1}=\Theta_{\nu-1}\frac{\Delta_{\nu+1}}{\Delta_\nu}+r'\Theta_\nu, \tag{7}$$

e, supponendo $\Theta_{\nu-1}$ e Θ_ν positivi, ne otteniamo che la parte reale del secondo membro dev'essere positiva, dunque $\Theta_{\nu+1}$ dev'essere una grandezza (reale) positiva. Intanto è

$$\Theta_1=a_1+ka_0>0\ ,\ \Theta_2=D_2+ka_1^2+k^2a_0a_1+kla_0>D_2>0;$$

dunque si può applicare il criterio d'induzione, per essere certi che dal segno positivo dei D, relativi al polinomio $f(x)$ si deduce il segno positivo dei corrispondenti Θ, relativi al polinomio $\psi(x)=f(x)(x+r)(x+r')=$ $=f(x)(x^2+kx+l)$. Ma tutto ciò risulta subordinato alla validità della

(6) e della (7): fino a quale ν possono ritenersi valide tali formule? Se consideriamo anche questi due determinanti:

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix},$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n & a_{n-1} \\ \pm r^n & \mp r^{n-1} & \cdots & r^2 & -r & 1 \end{vmatrix}.$$

e procediamo anche su questi per ottenere le due formule (3), (4); allora la validità delle dette formule potrà estendersi fino a $\nu = n-1$. Con ciò giungeremo a considerare anche Θ_n. Ma il polinomio $\psi(x)$, che è di grado $n+2$ ha anche il Θ_{n+1}, analogo al D_{n-1} del polinomio $f(x)$. È appunto quest'analogia ciò che ci dispensa da una ulteriore estensione (possibilissima) della validità delle formule (3), (4); infatti, per Θ_{n+1} vale una formula analoga alla (5), e si vede subito che, supposte positive le parti reali di tutte le r, il Θ_{n+1} risulta senz'altro positivo.

Resta in tale modo stabilito che, se l'equazione ha soltanto negative le parti reali delle radici, allora la catena dei primi minori principali del relativo determinante è costituita di elementi positivi.

Vogliamo far ancora vedere che, viceversa, se i D sono tutti positivi, allora le parti reali delle radici saranno negative.

Supponiamo, per assurdo, che i D siano positivi e che $f(x) = 0$ abbia qualche coppia di radici complesse con parte reale non negativa (è inutile parlare delle radici reali, perchè, avendo i coefficienti positivi, non può averne che negative). La formula (5), dove D_{n-1} si ammette positivo, accusa che non potrà $f(x) = 0$ ammettere una sola coppia di radici con parte reale non negativa, ma dovrà averne almeno un paio di coppie con parte reale *positiva* (non nulla perchè s'annullerebbe D_{n-1}). Sia $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$ una di queste due coppie. Consideriamo i due polinomî

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{(x-\alpha)^2 + \beta^2}, \quad \psi(x) = f(x)\left[(x+\alpha)^2 + \beta^2\right],$$

legati evidentemente da una relazione del tipo

$$\psi(x) = \varphi(x)\,(x^4 + \omega_1 x^2 + \omega_2)\,.$$

Ora, se noi formiamo i determinanti (analoghi ai D) relativi a $\varphi(x)$, e poi, facendovi figurare i coefficienti $b_0, b_1, \dots, b_{n-2}$ del polinomio $\varphi(x)$, scriviamo i Θ relativi a $\psi(x)$, noi vediamo subito che i determinanti relativi a $\varphi(x)$ coincidono coi Θ di ugual indice; ciò avviene perchè nel fattore $x^4 + \omega_1 x^2 + \omega_2$ figurano sole potenze pari di x. Per esempio, i due determinanti

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_0 & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 \\ b_5 & b_4 & b_3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} b_1 & b_0 & 0 \\ b_3 + \omega_1 b_1 & b_2 + \omega_1 b_0 & b_1 \\ b_5 + \omega_1 b_3 + \omega_2 b_1 & b_4 + \omega_1 b_2 + \omega_2 b_0 & b_3 + \omega_1 b_1 \end{vmatrix}$$

sono evidentemente uguali. Ma i D sono tutti positivi; ed i Θ, relativi al polinomio $\psi(x)$ ottenuto moltiplicando $f(x)$ per un trinomio $x^2 + kx + l$, del tipo dianzi considerato, debbono anch'essi risultare tutti positivi. Ma se noi ammettiamo il teorema di Hurwitz (evidentemente valido per i polinomî di secondo grado) fino al grado $n - 1$, noi vediamo che $\varphi(x) = 0$ di grado più basso di n, avendo ancora qualche coppia di radici con parte reale positiva, non potrà avere positivi tutti i suoi determinanti; ma questi coincidono coi primi $n - 3$ fra i Θ, dunque i Θ non potranno essere tutti positivi.

Si cade dunque nell'assurdo negando il teorema di Hurwitz.

Nel precedente lavoro, io non considerava i rapporti $\dfrac{\Delta_{\nu+1}}{\Delta_\nu}$; senza tale considerazione, era abusivo dedurre il segno positivo dei Θ da quello dei D. Il procedimento appoggiato sulle formule (6), (7) ripara, invece, questa omissione, che era da ripararsi.

Matematica. — *Sul calcolo del nucleo dell'equazione risolvente per una data equazione integrale*. Nota del dott. G. C. Evans, presentata dal Socio V. Volterra.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.