ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVIII.

1911

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1911

Il *monocloridrato*, $C_{23}H_{22}N_2 . HCl$, fu appunto ottenuto cristallizzando a caldo il sale incoloro dall'alcool assoluto. Si ottengono per raffreddamento mammelloni rosso ranciati, che, scaldati verso i 270°, sublimano senza fondere.

Il *cloroplatinato*, $C_{23}H_{22}N_2 . H_2PtCl_6$, è un sale biacido, che si ottiene trattando la soluzione cloridrica, incolora, della base, con acido cloroplatinico; dopo qualche tempo si separa un precipitato cristallino rosso-ranciato. Venne lavato brevemente con acqua e seccato sul cloruro di calcio.

Il *cloraurato* biacido è evidentemente quel precipitato che si ottiene dalla soluzione cloridrica, incolore, della base, con cloruro di oro; esso ha un delicato aspetto cristallino ed un colore giallo aureo: ma raccolto su filtro e lavato appena con acqua, si trasforma subito in una massa colorata intensamente in bruno, che si scioglie nell'acqua volgendo al violetto scuro. La massa bruna, seccata nel vuoto, dimostrò una composizione che si avvicina a quella del cloroaurato monoacido, $C_{23}H_{22}N_2 . HAuCl_3$.

Lo studio di questa interessante base sarà continuato.

Infine prendiamo da questa Nota l'occasione per ringraziare il laureando Fedro Pirani, per l'aiuto prestatoci in queste ricerche.

Matematica. — *Sopra i nuclei reiterati.* Nota del Corrispondente Giuseppe Lauricella.

È noto che, data una funzione $K(x, y)$ nel campo $\sigma = (a \leq x \leq b, a \leq y \leq b)$, dicesi nucleo reiterato di ordine n di $K(x, y)$ la funzione:

$$K_n(x, y) = \int_a^b K(x, \varrho) K_{n-1}(\varrho, y) d\varrho .$$

I nuclei reiterati hanno un ufficio molto importante nella teoria delle equazioni integrali: in particolare, di essi si è valso lo Schmidt [1] per dimostrare nel caso dei nuclei simmetrici l'esistenza degli *autovalori*, e delle corrispondenti *autofunzioni*.

Ora si può domandare: *data una funzione simmetrica* $H(x, y)$ *nel campo* σ, *e dato un numero intero e positivo* n, *può* $H(x, y)$ *considerarsi come nucleo reiterato di ordine* n? cioè, in termini più precisi: *esistono funzioni simmetriche* $K(x, y)$ *tali che*

$$K_n(x, y) = H(x, y) ? \tag{1}$$

Darò qui la condizione necessaria e sufficiente, cui deve soddisfare la funzione $H(x, y)$ per ogni valore di n, affinchè esista una funzione $K(x, y)$

[1] *Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen*, Matematische Annalen, LXIII.

soddisfacente all'equazione integrale (1), e darò ancora una espressione analitica di tutte le possibili soluzioni di tale equazione.

Una quistione analoga, benchè di indole assolutamente differente, si propone e risolve il prof. Volterra per il caso di integrali a limiti variabili, nei paragrafi 4 e 5 della sua Nota: *Contributo allo studio delle funzioni permutabili* [1].

Debbo aggiungere che per arrivare ai risultati menzionati, mi è necessario premettere alcuni teoremi sulle autofunzioni dei nuclei reiterati (§ 1), sugli sviluppi delle funzioni di due variabili indipendenti in serie di funzioni ortogonali (§ 2), e sugli sviluppi dei nuclei in serie delle corrispondenti coppie di funzioni ortogonali di Schmidt (§ 3), i quali teoremi formano, indipendentementemente dal problema propostomi, un contributo alla teoria delle equazioni integrali ed alla teoria degli sviluppi in serie di funzioni ortogonali.

§ 1. — Teorema sulle autofunzioni e sugli autovalori dei nuclei reiterati.

Sappiamo che se $\varphi(x)$ è autofunzione del nucleo $K(x, y)$ corrispondente all'autovalore λ, ossia se si ha:

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, y)\, \varphi(y)\, dy\,,$$

sarà $\varphi(x)$ autofunzione del nucleo $K_n(x, y)$ corrispondente all'autovalore λ^n per n numero intero e positivo qualsiasi. Aggiungiamo che, nel caso di n pari, se il nucleo $K(x, y)$, oltre all'autovalore λ, ammette l'altro $-\lambda$, corrispondente all'autofunzione $\varphi_1(x)$, sarà anche $\varphi_1(x)$ autofunzione di $K_n(x, y)$ corrispondente all'autovalore λ^n. Aggiungiamo ancora che $\varphi(x)$ e $\varphi_1(x)$ non possono essere identiche, perchè se fossero identiche, ossia se sussistessero le due equazioni

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, y)\, \varphi(y)\, dy \quad , \quad \varphi(x) = -\lambda \int_a^b K(x, y)\, \varphi(y)\, dy,$$

si avrebbe, in tutto il campo $\overline{ab}$,

$$\varphi(x) = 0\,.$$

Avuto anzi riguardo al fatto che le funzioni $\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$ sono determinate ciascuna a meno di un coefficiente costante arbitrario, si può dire che $\varphi(x)$ e $\varphi_1(x)$ devono essere linearmente indipendenti. Di qui risulta che se all'autovalore λ del nucleo $K(x, y)$ corrispondono j_1 autofunzioni linearmente

[1] Rendiconti Acc. dei Lincei, seduta del 5 marzo 1911.

indipendenti, e all'autovalore $-\lambda$ dello stesso nucleo corrispondono ν autofunzioni linearmente indipendenti, queste $j_1 + \nu$ autofunzioni saranno linearmente indipendenti tra di loro, e rappresenteranno quindi $j_1 + \nu$ autofunzioni linearmente indipendenti dal nucleo $K_n(x, y)$, corrispondenti all'autovalore λ^n; per cui il numero j_n delle autofunzioni linearmente indipendenti del nucleo $K_n(x, y)$, corrispondenti all'autovalore λ_n, dovrà soddisfare alla condizione:

$$j_n \geq j_1 + \nu . \tag{2}$$

Nel caso di n dispari, si avrà invece, come è chiaro,

$$j_n \geq j_1 . \tag{3}$$

È noto ancora, dalla teoria di Schmidt, che se $\varphi(x)$ è autofunzione del nucleo simmetrico $K_n(x, y)$ corrispondente all'autovalore c, per n dispari sarà $\varphi(x)$ autofunzione del nucleo simmetrico $K(x, y)$ corrispondente all'autovalore $\sqrt[n]{c}$, dove $\sqrt[n]{c}$ indica il valore aritmetico della radice n^{esima} di c; per n pari esistono invece due funzioni $\chi(x)$, $\psi(x)$, delle quali una almeno deve essere non identicamente nulla, tali che:

$$\varphi(x) = \chi(x) + \psi(x),$$

$$\chi(x) = \sqrt[n]{c} \int_a^b K(x, y)\, \chi(y)\, dy , \tag{4}$$

$$\psi(x) = -\sqrt[n]{c} \int_a^b K(x, y)\, \psi(y)\, dy . \tag{5}$$

In questo modo, per n dispari dovrà aversi:

$$j_n \leq j_1 ;$$

e quindi, avuto riguardo alla (3),

$$j_n = j_1 .$$

Nel caso di n pari, se $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$ sono le j_n autofunzioni linearmente indipendenti di $K_n(x, y)$, corrispondenti all'autovalore c, esisteranno j_n funzioni $\chi_1(x), \chi_2(x), \ldots$ soddisfacenti alla (4), e j_n funzioni $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots$ soddisfacenti alla (5), alcune delle quali possono essere identicamente nulle, tali che:

$$\chi_\nu(x) + \psi_\nu(x) = \varphi_\nu(x) \qquad (r = 1, 2, \ldots j_n). \tag{6}$$

Le $2j_n$ funzioni $\chi_1(x), \chi_2(x), \ldots$; $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots$ sono certamente autofunzioni del nucleo $K_n(x, y)$ corrispondenti all'autovalore c; sicchè tra di esse devono sussistere almeno j_n relazioni lineari omogenee a coefficienti

costanti. Osserviamo che, oltre a queste j_n relazioni, non può sussisterne alcuna altra della stessa natura; perchè altrimenti, in virtù delle (6), le $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$ non sarebbero linearmente indipendenti, contrariamente alla ipotesi fatta. Quindi j_n, e solo j_n delle funzioni $\chi_1(x), \chi_2(x), \ldots, \psi_1(x), \psi_2(x), \ldots$ sono linearmente indipendenti; e perciò sarà:

$$j_n \leq j_1 + \nu .$$

Questa e la (2) ci dànno:

$$j_n = j_1 + \nu .$$

Riassumendo, si ha il seguente teorema: *le autofunzioni linearmente indipendenti del nucleo simmetrico* $K_n(x, y)$ *corrispondenti all'autovalore* λ^n, *coincidono, nel caso di n dispari, con le autofunzioni linearmente indipendenti del nucleo simmetrico* $K(x, y)$, *corrispondenti all'autovalore* λ; *nel caso di n pari si possono fare coincidere con le autofunzioni linearmente indipendenti del nucleo simmetrico* $K(x, y)$, *corrispondenti ai due autovalori* λ *e* $-\lambda$ *insieme presi.*

§ 2. — Sviluppo delle funzioni di due variabili indipendenti in serie di funzioni ortogonali.

Sia:

$$U_1(x, y), U_2(x, y), \ldots \tag{7}$$

una serie infinita (numerabile) di funzioni ortogonali in un campo piano finito σ, di forma qualsiasi; siano cioè $U_1(x, y), U_2(x, y), \ldots$ funzioni sommabili insieme ai loro quadrati e ai loro prodotti due a due, tali che si abbia:

$$\int_\sigma U_\mu(x, y)\, U_\nu(x, y)\, dx\, dy = \begin{cases} 1 & \text{per } \mu = \nu , \\ 0 & \text{per } \mu \neq \nu . \end{cases}$$

Sia ancora $K(x, y)$ una funzione del campo σ sommabile insieme al suo quadrato ed insieme al prodotto di essa funzione per una qualunque delle $U_i(x, y)$.

Posto:

$$a_i = \int_\sigma K(x, y)\, U_i(x, y)\, dx\, dy ,$$

si ha:

$$0 \leq \int_\sigma \left\{ K(x, y) - \sum_1^m{}_i\, a_i U_i(x, y) \right\}^2 dx\, dy = \int_\sigma \{K(x, y)\}^2\, dx\, dy - \sum_1^m{}_i\, a_i^2 ,$$

da cui risulta che la serie $\sum_1^\infty{}_i\, a_i^2$ è convergente. Allora, posto:

$$f_p(x\,,y) = \sum_1^p{}_i\, a_i\, \mathrm{U}_i(x\,,y)\,,$$

si avrà che *la serie*

$$f_1(x\,,y)\ ,\ f_2(x\,,y)\,,\ldots \tag{8}$$

è convergente in media nel campo σ. Infatti si ha:

$$\int_\sigma \{f_{p+q}(x\,,y) - f_p(x\,,y)\}^2\, dx\, dy =$$

$$= \int_\sigma \left\{ \sum_{p+1}^{p+q}{}_i\, a_i\, \mathrm{U}_i(x\,,y) \right\}^2 dx\, dy = \sum_{p+1}^{p+q}{}_i\, a_i^2\,.$$

Di guisa che, in virtù del teorema di Weyl [1], sarà possibile trarre (ed in infiniti modi) dalla serie (8) una serie parziale:

$$f_{n_1}(x\,,y)\,,\, f_{n_2}(x\,,y)\,,\ldots$$

la quale converga *uniformemente in generale* nel campo σ, verso una unica funzione $f(x\,,y)$ sommabile nel campo σ insieme [2] al suo quadrato e al prodotto di essa per una qualsiasi altra funzione $\varphi(x\,,y)$, pure sommabile insieme al suo quadrato nel campo σ. In particolare si avrà:

$$\int_\sigma f(x\,,y)\, \mathrm{U}_i(x\,,y)\, dx\, dy = \lim_{p=\infty} \int_\sigma f_{n_p}(x\,,y)\, \mathrm{U}_i(x\,,y)\, dx\, dy = \lim_{p=\infty} a_i = a_i\,;$$

e quindi si potrà scrivere, per qualunque valore dell'indice i:

$$\int_\sigma \{f(x\,,y) - \mathrm{K}(x\,,y)\}\, \mathrm{U}_i(x\,,y)\, dx\, dy = 0\,.$$

Da questa formola risulta, se la serie (7) è chiusa,

$$\mathrm{K}(x\,,y) = f(x\,,y)$$

in tutto il campo σ, eccettuati al più i punti di un insieme di misura nulla.

Se la serie (7) non è chiusa, indicando con $\theta_1(x\,,y)$, $\theta_2(x\,,y)\,,\ldots$ le soluzioni effettive comuni alle equazioni:

$$\int_\sigma \theta(x\,,y)\, \mathrm{U}_i(x\,,y)\, dx\, dy = 0\,, \qquad (i = 1\,,2\,,3\,,\ldots)$$

[1] Questo teorema (Mathematische Annalen, Bd. LXVII, 1909, pp. 225-245; vedi pure Michel Plancherel, *Contribution à l'étude de la représentation d'une fonction arbitraire...*, Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo, t. XXX, 1910) vale senza modificazioni essenziali (nè nel contenuto, nè nella dimostrazione) per le funzioni di due o più variabili indipendenti.

[2] Cfr. Lauricella, *Sulla risoluzione dell'equazione integrale di 1ª specie*, § 3, pag. 533 (Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, seduta del 23 aprile 1911).

e supponendo che la funzione $K(x, y)$ soddisfaccia alle condizioni:

$$\int_\sigma K(x, y)\, \theta_j(x, y)\, dx\, dy = 0, \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots) \tag{9}$$

si avrà ancora, come è facile dimostrare [1],

$$K(x, y) = f(x, y)$$

in tutto il campo σ, eccettuati al più i punti di un insieme di misura nulla.

Osserviamo che si può scrivere:

$$f(x, y) = f_{n_1}(x, y) + \{f_{n_2}(x, y) - f_{n_1}(x, y)\} + \\ + \{f_{n_3}(x, y) - f_{n_1}(x, y)\} + \cdots,$$

ossia:

$$K(x, y) = \sum_1^{n_1}{}_\nu\, a_\nu\, U_\nu(x, y) + \sum_{n_1+1}^{n_2}{}_\nu\, a_\nu\, U_\nu(x, y) + \cdots \tag{10}$$

Osserviamo ancora che, per la validità della (10), le condizioni (9) sono anche necessarie.

Riepilogando, si ha il seguente teorema: *se la funzione* $K(x, y)$ *è sommabile nel campo* σ *insieme al suo quadrato, e se, nel caso in cui la serie* (7) *è non chiusa, soddisfa inoltre (come è necessario) alle condizioni* (9), *sarà sempre possibile, ed in infiniti modi, determinare una serie di numeri, interi positivi e crescenti indefinitamente,* $n_1, n_2, n_3, \ldots$, *in modo che si abbia la* (10) *e che la serie al secondo membro sia in tutto il campo* σ, *convergente uniformemente in generale.*

Come conseguenza del teorema di Weyl si ha ancora, indipendentemente dal teorema precedente, che *se in un campo* σ' *di misura non nulla, facente parte di* σ, *la serie* $\sum_1^\infty{}_\nu\, a_\nu\, U_\nu(x, y)$ *converge, avrà per somma nei punti di* σ' *la funzione* $K(x, y)$.

§ 3. — Sviluppo di un nucleo in serie delle corrispondenti autofunzioni.

Sia $K(x, y)$ una funzione sommabile insieme al suo quadrato nel campo $\sigma = (a \leq x \leq b\,,\ a \leq y \leq b)$; e sia, conformemente alla teoria di Schmidt,

$$\varphi_1(x)\,,\ \psi_1(y)\ ;\ \varphi_2(x)\,,\ \psi_2(y)\,;\ \ldots$$

la serie finita od infinita di coppie di funzioni ortogonali, e

$$\lambda_1\,,\ \lambda_2\,,\ \ldots$$

[1] Cfr. Lauricella, loc. cit., § 4; ed inoltre: *Sopra gli sviluppi in serie di funzioni ortogonali*, § 8, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXIX, anno 1910.

la corrispondente serie di costanti positive, tali che:

$$\varphi_i(x) = \lambda_i \int_a^b \mathrm{K}(x\,,\eta)\,\psi_i(\eta)\,d\eta,$$

$$\psi_i(y) = \lambda_i \int_a^b \mathrm{K}(\xi\,,y)\,\varphi_i(\xi)\,d\xi$$

Posto:

$$\mathrm{U}_i(x\,,y) = \varphi_i(x)\,\psi_i(y)\,,$$

si avrà:

$$\int_a^b\int_a^b \mathrm{U}_\mu(x\,,y)\,\mathrm{U}_\nu(x\,,y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_a^b \varphi_\mu(x)\,\varphi_\nu(x)\,dx \int_a^b \psi_\mu(y)\,\psi_\nu(y)\,dy = \begin{cases} 1 & \text{per } \mu = \nu\,, \\ 0 & \text{per } \mu \neq \nu\,; \end{cases}$$

e quindi, ponendo mente alla formola

$$a_i = \int_a^b\int_a^b \mathrm{K}(x\,,y)\,\mathrm{U}_i(x\,,y)\,dx\,dy = \frac{1}{\lambda_i}\,,$$

risulterà, in virtù del teorema del § precedente, che *si può determinare, ed in infiniti modi, una serie di numeri interi positivi e crescenti indefinitamente,* $n_1\,, n_2\,, \ldots,$ *tali che la serie*

$$(10)' \qquad \sum_1^{n_1}{}_\nu \frac{\varphi_\nu(x)\,\psi_\nu(y)}{\lambda_\nu} + \sum_{n_1+1}^{n_2}{}_\nu \frac{\varphi_\nu(x)\,\psi_\nu(y)}{\lambda_\nu} + \cdots$$

sia convergente uniformemente in generale verso una certa funzione, che indicheremo con $f(x\,,y)$, *nel campo* σ.

Fissato un valore di y, non si può asserire che la serie (10)′ sia convergente uniformemente in generale nel campo $a \leq x \leq b$. Però, in virtù della disuguaglianza

$$0 \leq \int_a^b \left\{ \mathrm{K}(x\,,y) - \sum_1^m{}_\nu \frac{\varphi_\nu(x)\,\psi_\nu(y)}{\lambda_\nu} \right\}^2 dx =$$

$$= \int_a^b \{\mathrm{K}(x\,,y)\}^2\,dx - \sum_1^m{}_\nu \left\{ \frac{\psi_\nu(y)}{\lambda_\nu} \right\}^2,$$

la serie

$$\sum_1^\infty{}_\nu \left\{ \frac{\psi_\nu(y)}{\lambda_\nu} \right\}^2,$$

numerica per il fissato valore di y, convergerà; e per ciò, la serie

$$f_1(x\,,y)\,,\, f_2(x\,,y)\,, \ldots,$$

per il fissato valore generico di y, sarà convergente in media nel campo $a \leq x \leq b$.

A *fortiori* sarà convergente in media la serie parziale:

$$f_{n_1}(x, y), f_{n_2}(x, y), \ldots \tag{11}$$

Quindi, in virtù del teorema di Weyl, potrà trarsi da questa serie una serie parziale:

$$f_{m_1}(x, y), f_{m_2}(x, y), \ldots, \tag{12}$$

la quale convergerà uniformemente in generale nel campo $a \leq x \leq b$ verso una funzione $\varphi(x, y)$; ed inoltre, supposto sempre fisso il valore di y, per tutti i valori di x per i quali la serie (11) converge, ossia per tutti i valori di x per i quali la funzione $f(x, y)$ è definita dalla serie (10)', si avrà:

$$f(x, y) = \varphi(x, y).$$

Noi ci serviremo di questa formola per determinare la $f(x, y)$ in quei punti del campo $a \leq x \leq b$ nei quali eventualmente, mentre la $\varphi(x, y)$ è determinata dalla serie (12), la serie (10)' non è convergente e perciò la $f(x, y)$ è indeterminata. In questo modo, per il fissato valore di y, si potrà scrivere per tutti i punti x del campo $\overline{ab}$, esclusi al più i punti di un insieme di misura nulla,

$$f(x, y) = \varphi(x \quad y) = \sum_{1}^{m_1}{}_{\nu} \frac{\varphi_\nu(x)\, \psi_\nu(y)}{\lambda_\nu} + \sum_{m_1+1}^{m_2}{}_{\nu} \frac{\varphi_\nu(x)\, \psi_\nu(y)}{\lambda_\nu} + \cdots$$

Si può osservare che la serie al secondo membro di questa formola, moltiplicata per una qualsiasi funzione sommabile insieme al suo quadrato ed insieme al prodotto di essa per tutte le $\varphi_\nu(x)$ nel campo $a \leq x \leq b$, è integrabile termine a termine rispetto ad x nel campo $\overline{ab}$.

Ciò premesso, si dimostra, ripetendo noti ragionamenti di Schmidt [1], che *si ha*:

$$\mathrm{K}(x, y) = f(x, y) = \sum_{1}^{n_1}{}_{\nu} \frac{\varphi_\nu(x)\, \psi_\nu(y)}{\lambda_\nu} + \sum_{n_1+1}^{n_2}{}_{\nu} \frac{\varphi_\nu(x)\, \psi_\nu(y)}{\lambda_\nu} + \cdots \tag{13}$$

in tutto il campo σ, esclusi al più i punti di un insieme di misura superficiale nulla.

Possiamo inoltre notare che, *se in un campo σ', di misura superficiale non nulla e facente parte di σ, la serie $\sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} \frac{\varphi_\nu(x)\, \psi_\nu(y)}{\lambda_\nu}$ converge, si avrà nei punti di σ':*

$$\mathrm{K}(x, y) = \sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} \frac{\varphi_\nu(x)\, \psi_\nu(y)}{\lambda_\nu}.$$

[1] Loc. cit., § 8, § 16.

Aggiungiamo ancora che, in virtù di un recente teorema di Egoroff [1], *la serie* $\sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} \frac{\varphi_\nu(x)\,\psi_\nu(y)}{\lambda_\nu}$ *nel campo* σ', *nel quale per ipotesi è convergente, convergerà uniformemente in generale.*

Dal risultato contenuto nella formola (13), segue come corollario che: (α) *se due funzioni* $K(x, y)$, $K'(x, y)$ (*sommabili insieme coi loro quadrati nel campo* σ *e nel campo* $a \leq x \leq b$ *per ogni valore di* y, *nel campo* $a \leq y \leq b$ *per ogni valore di* x) *hanno le medesime coppie di funzioni ortogonali, corrispondenti alle medesime costanti, coincidono.*

Ciò premesso, sia $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ una serie di costanti, alcune delle quali (in numero finito) possono anche coincidere tra di loro, tale che la serie $\sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} \frac{1}{\lambda_\nu^2}$ sia convergente. Alla serie $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ si faccia corrispondere una *qualsiasi* serie di coppie di funzioni ortogonali:

$$\varphi_1(x), \psi_1(y)\ ;\ \varphi_2(x), \psi_2(y)\ ; \ldots \tag{14}$$

In virtù del teorema di Weyl e di quanto precede, si ha che: (β) *si può determinare, ed in infiniti modi, indipendentemente dalle* (14), *una serie di numeri interi positivi e crescenti indefinitamente* $n_1, n_2, \ldots$, *in modo tale che la funzione* $f(x, y)$, *determinata dalla serie*

$$f(x, y) = \sum_{1}^{n_1}{}_{\nu} \frac{\varphi_\nu(x)\,\psi_\nu(y)}{\lambda_\nu} + \sum_{n_1+1}^{n_2}{}_{\nu} \frac{\varphi_\nu(x)\,\psi_\nu(y)}{\lambda_\nu} + \cdots$$

abbia per coppie di funzioni ortogonali la serie (14), *e per corrispondenti valori costanti le* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ In virtù poi del precedente teorema di unicità (α), risulta che *la funzione* $f(x, y)$, *così determinata, è la sola funzione (sommabile insieme al suo quadrato nel campo* σ, *e nel campo* $a \leq x \leq b$ *per ogni valore di* y, *nel campo* $a \leq y \leq b$ *per ogni valore di* x) *la quale abbia per coppie di funzioni ortogonali quelle della serie* (14) *e per corrispondenti valori costanti le* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$

§ 4. — Risoluzione dell'equazione integrale [1].

Data una funzione simmetrica $H(x, y)$, sommabile insieme al suo quadrato nel campo σ, tanto superficialmente quanto linearmente, siano $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ i suoi autovalori e

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots \tag{15}$$

[1] Comptes rendus, t. 152, n. 5, 30 janvier 1911.

le corrispondenti autofunzioni normalizzate. Supponiamo che esista una funzione simmetrica $K(x, y)$, sommabile insieme al suo quadrato superficialmente e linearmente nel campo σ, tale che:

$$K_n(x, y) = H(x, y). \tag{1}$$

In virtù del teorema al § 1, si ha che, se n è dispari, gli autovalori della funzione $K(x, y)$ saranno dati dalle serie $\sqrt[n]{\lambda_1}, \sqrt[n]{\lambda_2}, \ldots$ (intendendo per $\sqrt[n]{\lambda_i}$ la radice reale n^{esima} di λ_i), e la serie delle corrispondenti autofunzioni sarà la (15) stessa; se n è pari, le $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ dovranno essere tutte positive, e gli autovalori della funzione $K(x, y)$ dovranno essere quelli di una delle ∞^2 serie, corrispondenti alla scelta dei segni,

$$\pm\sqrt[n]{\lambda_1}, \pm\sqrt[n]{\lambda_2}, \ldots;$$

e quindi, in virtù della disuguaglianza di Bessel, si avrà che, tanto nel caso di n pari, quanto in quello di n dispari, la serie:

$$\sum_1^\infty {}_\nu \lambda_\nu^{-\frac{2}{n}} \tag{16}$$

dovrà essere convergente.

Viceversa, si supponga la (16) convergente. Allora, se n è dispari, in virtù del teorema (β), dovrà potersi determinare, dipendentemente solo dalla serie $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, una serie di numeri interi e positivi crescenti indefinitamente $n_1, n_2, \ldots$, tali che la serie

$$f(x, y) = \sum_1^{n_1} {}_\nu \frac{\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(y)}{\sqrt[n]{\lambda_\nu}} + \sum_{n_1+1}^{n_2} {}_\nu \frac{\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(y)}{\sqrt[n]{\lambda_\nu}} + \cdots \tag{17}$$

sia convergente uniformemente in generale nel campo σ, e che la $f(x, y)$, che essa rappresenta, abbia per autovalori le costanti $\sqrt[n]{\lambda_1}, \sqrt[n]{\lambda_2}, \ldots$ e per corrispondenti autofunzioni le $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$; quindi, in virtù del teorema al § 1, *la funzione $f(x, y)$ sarà una soluzione dell'equazione integrale* (1), *e*, in virtù del teorema (α), *sarà l'unica soluzione di tale equazione.*

Nel caso di n pari, indicate con

$$\varphi_{j_\nu+1}(x), \varphi_{j_\nu+2}(x), \ldots \varphi_{j_\nu+\mu}(x)$$

le μ autofunzioni linearmente indipendenti del nucleo $H(x, y)$, corrispondenti ai μ autovalori uguali a λ_ν, e indicati con

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1\mu} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\mu 1} & a_{\mu 2} & \ldots & a_{\mu\mu} \end{matrix}$$

gli elementi della più generale sostituzione ortogonale di ordine μ, ossia il più generale sistema di numeri a_{rs} tali che si abbia

$$\sum_\nu a_{\nu r}\, a_{\nu s} = \begin{cases} 1 \text{ per } r = s\,, \\ 0 \text{ per } r \neq s\,, \end{cases}$$

si ponga:

$$\psi_r(x) = \sum_{1}^{\mu}{}_\rho\, a_{r\rho}\, \varphi_{j_\nu+\rho}(x)\,.$$

Le $\psi_1(x)\,,\psi_2(x)\,,\ldots$ costituiranno un sistema di funzioni ortogonali; e, in virtù del teorema (β), si deve poter determinare, ed in infiniti modi, indipendentemente dalle $\psi_r(x)$, una serie di numeri interi positivi e crescenti indefinitamente $n_1\,,n_2\,,\ldots$, tali che la serie

$$(18) \qquad f(x\,,y) = \sum_{1}^{n_1}{}_\nu \frac{\psi_\nu(x)\,\psi_\nu(y)}{\pm\sqrt[n]{\lambda_\nu}} + \sum_{n_1+1}^{n_2}{}_\nu \frac{\psi_\nu(x)\,\psi_\nu(y)}{\pm\sqrt[n]{\lambda_\nu}} + \cdots$$

sia convergente uniformemente in generale nel solito campo σ e che abbia per autofunzioni le $\psi_1(x)\,,\psi_2(x)\,,\ldots$, corrispondenti rispettivamente agli autovalori $\pm\sqrt[n]{\lambda_1}\,,\pm\sqrt[n]{\lambda_2}\,,\ldots$

In causa dei segni $\pm$ le possibili serie di autovalori sono ∞^2. Per ogni serie di possibili autovalori si hanno poi varî nuclei $f(x\,,y)$, corrispondenti ai varî sistemi delle a_{rs} che si possono considerare. È da osservare, però, che non tutte le $f(x\,,y)$ corrispondenti a due diversi sistemi di a_{rs} sono diverse. Così, ad esempio, nel caso in cui per sistema di autovalori si prende la serie $\sqrt[n]{\lambda_1}\,,\sqrt[n]{\lambda_2}\,,\ldots$ con i segni tutti positivi, si ha sempre, qualunque sia il sistema delle a_{rs}, un unico nucleo: infatti le autofunzioni corrispondenti ad uno stesso autovalore sono sempre una combinazione lineare delle $\varphi_j(x)$ corrispondenti; sicchè, in questo caso, tutte le $f(x\,,y)$, che per ipotesi hanno gli stessi autovalori tutti positivi, hanno ancora le medesime autofunzioni; e quindi, in virtù del teorema (α), coincidono. Il medesimo fatto si verifica allorchè si prende la serie degli autovalori $-\sqrt[n]{\lambda_1}\,,-\sqrt[n]{\lambda_2}\,,\ldots$ Lo stesso non si può ripetere però negli altri casi, nei quali alcuni autovalori si prendono positivi ed altri negativi; benchè anche qui in generale il numero delle funzioni $f(x\,,y)$ distinte è inferiore all'ordine di arbitrarietà dei coefficienti a_{rs}. Comunque, poichè tutti i nuclei $f(x\,,y)$, dati dalla formola (18), hanno per autofunzioni le $\psi_1(x)\,,\psi_2(x)\,,\ldots$, i loro nuclei reiterati di ordine n, mentre hanno per autovalori le $\lambda_1\,,\lambda_2\,,\ldots$, avranno per autofunzioni corrispondenti le $\psi_1(x)\,,\psi_2(x)\,,\ldots$; ed ancora, poichè le $\psi_i(x)$ corrispondenti ad un certo gruppo di valori λ_i uguali fra di loro, sono espressioni lineari ed omogenee, linearmente indipendenti, delle $\varphi_i(x)$ corrispondenti

allo stesso gruppo di autovalori λ_i uguali fra di loro, ne segue, in virtù del teorema di unicità (α), che tutti i nuclei reiterati di ordine n, dei nuclei dati dalla formola (18), coincideranno con $H(x, y)$. Per altro è evidente, in forza del teorema al § 1, che qualunque nucleo, avente per reiterato di ordine n la funzione $H(x, y)$, deve essere incluso nella formola (18), *la quale dà quindi, per n pari, tutte le possibili soluzioni dell'equazione integrale* (1).

Riepilogando, si ha: *condizione necessaria e sufficiente affinchè l'equazione integrale* (1) *ammetta una soluzione simmetrica, è che la serie* (16) *sia convergente; quando questa condizione è soddisfatta, se n è dispari, si avrà una sola soluzione rappresentata dalla formola* (17): *se n è pari, si avranno invece infinite soluzioni, contenute tutte nella formola* (18).

Chimica. — *La struttura degli azossicomposti* [1]. Nota del Corrisp. A. Angeli e di Luigi Alessandri.

Ancora qualche anno addietro, a proposito degli eteri isomeri della nitrosofenilidrossilammina e fenilnitrammina, venne posto in rilievo che queste due sostanze con tutta probabilità differiscono fra di loro per la diversa posizione che ha assunto l'atomo di ossigeno nell'etere metilico dell'idrato di diazobenzolo dal quale si possono immaginare derivati [2]:

$$C_6H_5 . \underset{\underset{O}{\|}}{N} = N . (OCH_3) \qquad\qquad C_6H_5 . N = \underset{\underset{O}{\|}}{N} . (OCH_3)$$

E siccome taluni attribuiscono all'acido diazobenzolico, ed altri anche alla nitrosofenildrossilammina, la struttura:

$$C_6H_5 . \underset{\diagdown O \diagup}{N - N} . (OH)$$

si vede subito che tali composti stanno in rapporto molto prossimo con gli azossicomposti aromatici ai quali pure, in modo arbitrario e senza nessuna base sperimentale viene assegnata la formola:

$$C_6H_5 . \underset{\diagdown O \diagup}{N - N} . C_6H_5$$

Nel caso dell'azossibenzolo, essendo la molecola perfettamente simmetrica,

[1] Lavoro eseguito nel R. Istituto di Studî Superiori in Firenze.

[2] *Ueber einige sauerstoffhaltige Verbindungen des Stickstoffs*, Stuttgart, 1908. pag. 18.