

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVIII.

1911

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XX.

1° SEMESTRE.



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1911

Meccanica. — *Calcolo delle azioni dinamiche esercitate da correnti fluide sopra pareti rigide.* Nota II di TOMMASO BOGGIO, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

4. *Caso di più correnti.* — Il metodo esposto per ottenere la (8) è applicabile in casi molto più generali di quello considerato: ad esempio in quello in cui dall'infinito provengono diverse correnti libere, le quali subiscono eventuali deviazioni da parte di tubi (superficie rigide) che esse attraversano; alcune, o tutte queste correnti, possono pure investire altre pareti rigide, suddividendosi in correnti parziali, che proseguono poi fino all'infinito a valle.

Anche in questi casi generali è assai facile trovare la formula analoga alla (8), esprimente la risultante delle azioni dinamiche del sistema di correnti date, sul sistema delle superficie rigide che sono a contatto di esse.

Se nessuna delle superficie rigide si estende sino all'infinito, si ha:

$$\mathbf{R} = \sum_i Q_{1i} \mathbf{v}_{1i} - \sum_j Q_{2j} \mathbf{v}_{2j},$$

ove le Q_{1i} , \mathbf{v}_{1i} , Q_{2j} , \mathbf{v}_{2j} rappresentano le portate e velocità asintotiche delle correnti fluide, rispettivamente a monte e a valle.

Poichè, in forza della (4), le densità asintotiche sono tutte eguali, anche le grandezze delle velocità asintotiche devono essere eguali, perciò la somma delle sezioni normali asintotiche Ω_{1i} delle correnti a monte del moto, deve essere eguale a quella delle sezioni normali asintotiche Ω_{2i} a valle.

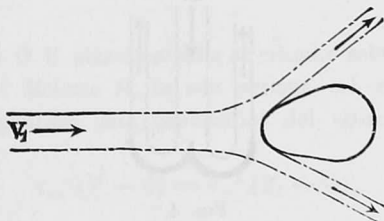


FIG. 3.

In particolare, per una corrente libera liquida, di densità ρ (costante), che incontra una superficie rigida, suddividendosi in due correnti parziali (come nella fig. 3), risulta:

$$(11) \quad \mathbf{R} = Q_{11} \mathbf{v}_{11} - Q_{21} \mathbf{v}_{21} - Q_{22} \mathbf{v}_{22} \quad (1);$$

(1) Nel caso di due dimensioni, questa formula è pure stata ottenuta dal prof. Ciccotti nel lavoro: *Sulla biforcazione di una vena liquida* (in corso di stampa in questi

ed inoltre, fra le sezioni normali asintotiche passa la relazione

$$(12) \quad \Omega_{11} = \Omega_{21} + \Omega_{22}.$$

La componente R_1 di \mathbf{R} secondo una direzione a , risulta perciò espressa da:

$$(11') \quad R_1 = \rho V_{11}^2 (\Omega_{11} \cos \delta - \Omega_{21} \cos \delta_1 - \Omega_{22} \cos \delta_2),$$

ove $\delta, \delta_1, \delta_2$ sono gli angoli che i vettori $\mathbf{v}_{11}, \mathbf{v}_{21}, \mathbf{v}_{22}$ formano rispettivamente colla direzione a .

Se gli angoli δ_1, δ_2 sono eguali, si ha, ricordando la (12),

$$R_1 = \rho \Omega_{11} V_{11}^2 (\cos \delta - \cos \delta_1),$$

la quale concorda con quelle date dal Masoni (loc. cit., pag. 185) e dal Flamant (loc. cit., pag. 578) per il caso in cui una corrente investe una superficie piana.

Se $\delta = 0$, il valore di R_1 non è altro che la *spinta* subita dall'ostacolo. In particolare, per una corrente che investe normalmente una superficie piana, sufficientemente ampia, in guisa che le due correnti parziali abbiano direzioni opposte (normali a quella della corrente unica), si ha $\delta_1 = \pi:2$, e però la spinta ha per espressione:

$$R_1 = \rho \Omega_{11} V_{11}^2;$$

questa formula — dice il Masoni (loc. cit., pag. 184) — è dovuta ad Eulero, ed è stata verificata sperimentalmente da Morosi, Savart, Bidone.

Se invece la corrente unica colpisce una superficie avente la forma segnata nella fig. 4 (che è quella di una paletta delle ruote *Pelton*), in modo

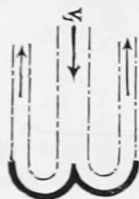


FIG. 4.

che il liquido sia obbligato a ritornare indietro, parallelamente alla direzione primitiva, si ha $\delta_1 = \pi$, onde, per la spinta:

$$R_1 = 2\rho \Omega_{11} V_{11}^2;$$

in tal caso il valore di R_1 è massimo.

Rendiconti); egli mi ha pure gentilmente fatto sapere di aver stabilito tale formula, come pure quella già citata del Colonnetti, senza ricorrere alla teoria delle funzioni di variabile complessa, ma applicando un'immediata conseguenza del lemma di Green.

5. *Momento risultante.* — Calcoliamo ora il momento risultante \mathbf{M} , rispetto ad un punto qualunque O (polo), delle azioni dinamiche esercitate dal fluido in moto, sulla parete σ del tubo (fig. 1).

Esso è espresso da:

$$\mathbf{M} = - \int_{\sigma} (p - p_0) \mathbf{N} \wedge (\mathbf{P} - O) d\sigma.$$

Poichè sulle superficie libere λ si ha $p = p_0$, si può pure scrivere:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} = & - \int_{\sigma + \lambda + \Omega_1 + \Omega_2} (p - p_0) \mathbf{N} \wedge (\mathbf{P} - O) d\sigma + \\ & + \int_{\Omega_1} (p - p_0) \mathbf{N} \wedge (\mathbf{P} - O) d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} (p - p_0) \mathbf{N} \wedge (\mathbf{P} - O) d\Omega_2; \end{aligned}$$

trasformiamo il primo integrale col teorema della rotazione ⁽¹⁾, e semplifichiamo i due ultimi integrali; si ha così:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} = & \int_{\mathcal{S}} \text{rot} [(p - p_0) (\mathbf{P} - O)] dS + \\ & + (p_1 - p_0) \frac{\mathbf{v}_1}{V_1} \wedge \int_{\Omega_1} (\mathbf{P} - O) d\Omega_1 - (p_2 - p_0) \frac{\mathbf{v}_2}{V_2} \wedge \int_{\Omega_2} (\mathbf{P} - O) d\Omega_2. \end{aligned}$$

Occupiamoci anzitutto del calcolo di

$$\mathbf{v}_1 \wedge \int_{\Omega_1} (\mathbf{P} - O) d\Omega_1;$$

conduciamo pel polo O il piano normale al cilindro asintotico della corrente a monte del moto, e diciamo Ω_0 la sua sezione col cilindro, e P_1 la sua intersezione colla generatrici del cilindro condotta per P ; allora si ha:

$$\mathbf{v}_1 \wedge (\mathbf{P} - O) = \mathbf{v}_1 \wedge (\mathbf{P}_1 - O),$$

perchè i vettori $\mathbf{P} - P_1$ e \mathbf{v}_1 sono paralleli. Ne segue:

$$(13) \quad \mathbf{v}_1 \wedge \int_{\Omega_1} (\mathbf{P} - O) d\Omega_1 = \mathbf{v}_1 \wedge \int_{\Omega_0} (\mathbf{P}_1 - O) d\Omega_0 = \Omega_0 \mathbf{v}_1 \wedge (\mathbf{G}_1 - O),$$

ove G_1 indica il baricentro della sezione Ω_0 , o, se si vuole, la proiezione (ortogonale) del polo O sull'asse del cilindro asintotico considerato. Nell'ul-

⁽¹⁾ Cfr. i già citati *Éléments de calcul vectoriel*, pag. 105.

timo membro si può poi sostituire Ω_1 ad Ω_0 , perchè queste due sezioni sono congruenti.

Analogamente, indicando con G_2 la proiezione del polo O sull'asse del cilindro asintotico della vena a valle del moto, si ha:

$$(13') \quad \mathbf{v}_2 \wedge \int_{\Omega_1} (\mathbf{P} - \mathbf{O}) d\Omega_2 = \Omega_2 \mathbf{v}_2 \wedge (G_2 - \mathbf{O}).$$

Sostituendo le (13), (13') nell'espressione di \mathbf{M} , e sviluppando il primo termine, risulta:

$$(14) \quad \mathbf{M} = \int_{\mathbf{s}} \text{grad } p \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}) dS + (p_1 - p_0) \Omega_1 \frac{\mathbf{V}_1}{V_1} \wedge (G_1 - \mathbf{O}) - \\ - (p_2 - p_0) \Omega_2 \frac{\mathbf{V}_2}{V_2} \wedge (G_2 - \mathbf{O}).$$

Giova osservare, come già abbiamo fatto per la (5), che se il tubo σ non si estende indefinitamente, gli ultimi due termini della (14) spariscono, in virtù delle (6); se invece il tubo si estende indefinitamente soltanto a monte del moto, sussistono le (6') e perciò sparisce solo l'ultimo termine. Se poi il tubo si estende indefinitamente così a monte che a valle, non ha luogo alcuna riduzione nella (14).

Ciò premesso, trasformiamo il primo termine della (14). Dalla (3) segue:

$$\int_{\mathbf{s}} \text{grad } p \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}) dS = - \int_{\mathbf{s}} \left(\frac{d\mathbf{v}}{dP} \varrho \mathbf{v} \right) \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}) dS;$$

ora il secondo membro può essere trasformato per mezzo della formula seguente, che si deduce facilmente dalla (1) ponendo $\mathbf{v} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O})$ al posto di \mathbf{v} :

$$\int_{\mathbf{s}} \left(\frac{d\mathbf{v}}{dP} \mathbf{u} \right) \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}) dS = - \int_{\sigma} (\mathbf{u} \times \mathbf{N}) \mathbf{v} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}) d\sigma - \\ - \int_{\mathbf{s}} \mathbf{v} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \text{div } \mathbf{u} dS - \int_{\mathbf{s}} \mathbf{v} \wedge \mathbf{u} dS \quad (1),$$

e si ottiene così, ricordando anche la (2):

$$\int_{\mathbf{s}} \text{grad } p \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}) dS = \int_{\sigma + \lambda + \Omega_1 + \Omega_2} (\mathbf{v} \times \mathbf{N}) \varrho \mathbf{v} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}) d\sigma;$$

ma nei punti di $\sigma + \lambda$ la velocità è tangenziale, perciò:

$$\int_{\mathbf{s}} \text{grad } p \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}) dS = \int_{\Omega_1 + \Omega_2} (\mathbf{v} \times \mathbf{N}) \varrho \mathbf{v} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}) d\sigma,$$

(1) Cfr. la mia Nota, già citata, dell'Istituto Veneto.

ovvero, ricordando le (13), (13'):

$$\int_{\mathbf{s}} \text{grad } p \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}) \, dS = \varrho_1 \mathbf{V}_1 \boldsymbol{\Omega}_1 \mathbf{v}_1 \wedge (\mathbf{G}_1 - \mathbf{O}) - \varrho_2 \mathbf{V}_2 \boldsymbol{\Omega}_2 \mathbf{v}_2 \wedge (\mathbf{G}_2 - \mathbf{O}).$$

Sostituendo nella (14), e tenendo conto delle (7), si ottiene infine:

$$(15) \quad \mathbf{M} = Q[\mathbf{v}_1 \wedge (\mathbf{G}_1 - \mathbf{O}) - \mathbf{v}_2 \wedge (\mathbf{G}_2 - \mathbf{O})] + \\ + (p_1 - p_0) \boldsymbol{\Omega}_1 \frac{\mathbf{V}_1}{V_1} \wedge (\mathbf{G}_1 - \mathbf{O}) - (p_2 - p_0) \boldsymbol{\Omega}_2 \frac{\mathbf{V}_2}{V_2} \wedge (\mathbf{G}_2 - \mathbf{O}).$$

Questa formula mostra che il vettore \mathbf{M} dipende, al pari di \mathbf{R} , solo da elementi asintotici del moto (e dal polo \mathbf{O}).

I vettori $\mathbf{v}_1 \wedge (\mathbf{G}_1 - \mathbf{O})$, $\mathbf{v}_2 \wedge (\mathbf{G}_2 - \mathbf{O})$ non sono evidentemente altro che i momenti, rispetto al polo \mathbf{O} di due forze aventi per vettori \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 e per linee d'azione gli assi dei due cilindri asintotici.

6. *Casi particolari.* — Se il tubo σ non si estende indefinitamente, la (15) si riduce a:

$$(15') \quad \mathbf{M} = Q[\mathbf{v}_1 \wedge (\mathbf{G}_1 - \mathbf{O}) - \mathbf{v}_2 \wedge (\mathbf{G}_2 - \mathbf{O})].$$

Questa formula concorda con quella data dallo Zeuner (loc. cit., pag. 89) per tubi ad asse piano; però nella formula dello Zeuner i simboli \mathbf{v}_1 , \mathbf{G}_1 , \mathbf{v}_2 , \mathbf{G}_2 indicano elementi relativi alle sezioni d'entrata e d'uscita del tubo (e non elementi asintotici).

La formula precedente — dice lo Zeuner (loc. cit., pag. 90) — *joue un rôle capital dans la théorie des turbines.*

Se gli assi dei due cilindri asintotici giacciono in uno stesso piano τ e si sceglie il polo \mathbf{O} su τ , il momento \mathbf{M} tende a far rotare il tubo intorno ad una retta normale al piano τ e con una forza di intensità proporzionale alla somma o alla differenza delle distanze di \mathbf{O} dai due assi.

Se poi la forma del tubo σ è tale che gli assi dei due cilindri asintotici siano paralleli, si ha $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$, perciò la (15') si riduce ad

$$\mathbf{M} = Q\mathbf{v}_1 \wedge (\mathbf{G}_1 - \mathbf{G}_2).$$

quindi il momento è costante rispetto a qualsivoglia polo. Esso tende a far rotare il tubo intorno ad una retta normale al piano dei due assi e con una forza di intensità proporzionale alla loro distanza. Quanto alla risultante \mathbf{R} , abbiamo già osservato che essa è nulla.

Se il tubo σ si estende indefinitamente a monte, nella (15) sparisce l'ultimo termine, ed effettuando poi trasformazioni analoghe a quelle fatte

per ottenere la (10), si trova, nel caso di un liquido di densità σ :

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2} \rho \Omega_2 V_2^2 \left[\left(\frac{\Omega_1}{\Omega_2} + \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \right) \frac{\mathbf{v}_1}{V_2} \wedge (\mathbf{G}_1 - \mathbf{O}) - 2 \frac{\mathbf{v}_2}{V_2} \wedge (\mathbf{G}_2 - \mathbf{O}) \right].$$

7. *Caso di più correnti.* — Il metodo esposto nel n. 5 può essere applicato al calcolo del momento risultante delle azioni esercitate da più correnti sopra pareti rigide; supponendo ad es. che queste ultime non si estendano sino all'infinito, si ottiene:

$$\mathbf{M} = \sum_i Q_{1i} \mathbf{v}_{1i} \wedge (\mathbf{G}_{1i} - \mathbf{O}) - \sum_j Q_{2j} \mathbf{v}_{2j} \wedge (\mathbf{G}_{2j} - \mathbf{O}),$$

ove le notazioni hanno lo stesso significato che nel n. 4, e \mathbf{G}_{1i} , \mathbf{G}_{2j} indicano le proiezioni del polo \mathbf{O} sugli assi dei cilindri asintotici delle varie correnti.

Nel caso particolare della fig. 3, si avrebbe perciò:

$$\mathbf{M} = Q_{11} \mathbf{v}_{11} \wedge (\mathbf{G}_{11} - \mathbf{O}) - Q_{21} \mathbf{v}_{21} \wedge (\mathbf{G}_{21} - \mathbf{O}) - Q_{22} \mathbf{v}_{22} \wedge (\mathbf{G}_{22} - \mathbf{O}).$$

8. *Moto non permanente.* — Il metodo del n. 2 può essere applicato al calcolo della risultante delle azioni esercitate dal fluido sul tubo σ , anche nell'ipotesi che il moto non sia stazionario, e che sul fluido agiscano forze di massa, come ora vogliamo mostrare brevemente.

Nel caso di moti non permanenti, le (2) (3) debbono esser sostituite rispettivamente dalle:

$$(16) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0,$$

$$(17) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{d\mathbf{v}}{dP} \mathbf{v} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p,$$

ove \mathbf{F} è il vettore delle forze di massa (riferite all'unità di massa).

Chiamiamo σ_1 , σ_2 le sezioni (piane) estreme del tubo ed S lo spazio racchiuso dal tubo (fig. 5), il quale spazio risulta perciò limitato dal contorno $\sigma + \sigma_1 + \sigma_2$.

Circa il tubo σ , supporremo che esso non si estenda indefinitamente, e che inoltre la velocità nei punti P dell'orifizio d'entrata σ_1 si possa sensibilmente ritenere indipendente da P , e che lo stesso accada per la velocità nei punti dell'orifizio d'uscita σ_2 ; chiameremo \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 queste due velocità, che supporremo inoltre normali rispettivamente a σ_1 e σ_2 , e V_1 , V_2 le loro grandezze.

Si ha poi, per la risultante:

$$\mathbf{R} = - \int_{\sigma} (p - p_0) \mathbf{N} d\sigma,$$

od ancora:

$$\mathbf{R} = - \int_{\sigma + \sigma_1 + \sigma_2} (p - p_0) \mathbf{N} d\sigma + \int_{\sigma_1} (p - p_0) \mathbf{N} d\sigma_1 + \int_{\sigma_2} (p - p_0) \mathbf{N} d\sigma_2,$$

cioè:

$$\mathbf{R} = \int_S \text{grad } p dS + (p_1^m - p_0) \sigma_1 \frac{\mathbf{V}_1}{V_1} - (p_2^m - p_0) \sigma_2 \frac{\mathbf{V}_2}{V_2},$$

ove p_1^m, p_2^m indicano la media delle pressioni rispettivamente nei punti di σ_1 e σ_2 .

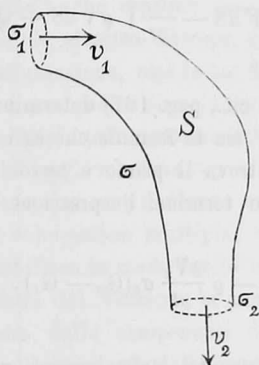


FIG. 5.

Trasformiamo l'integrale di $\text{grad } p$. Dalla (17) risulta:

$$\int_S \text{grad } p dS = \int_S \rho \mathbf{F} dS - \int_S \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dS - \int_S \frac{d\mathbf{v}}{dP} (\rho \mathbf{v}) dS,$$

ovvero, applicando la (1) e ricordando la (16):

$$\begin{aligned} \int_S \text{grad } p dS = \int_S \rho \mathbf{F} dS - \int_S \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dS - \int_S \mathbf{v} \frac{\partial \rho}{\partial t} dS + \\ + \int_{\sigma + \sigma_1 + \sigma_2} (\mathbf{v} \times \mathbf{N}) \rho \mathbf{v} d\sigma, \end{aligned}$$

che può ancora scriversi:

$$\int_S \text{grad } p dS = \int_S \rho \mathbf{F} dS - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \rho \mathbf{v} dS + Q(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2),$$

ove Q è la portata.

Sostituendo nell'espressione di \mathbf{R} , si ha:

$$\mathbf{R} = \int_s \rho \mathbf{F} dS - \frac{\partial}{\partial t} \int_s \rho \mathbf{v} dS + Q(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) + (p_1^m - p_0) \sigma_1 \frac{\mathbf{v}_1}{V_1} - (p_2^m - p_0) \sigma_2 \frac{\mathbf{v}_2}{V_2}.$$

Se le pressioni medie p_1^m, p_2^m non sono sensibilmente differenti da p_0 , si può ritenere:

$$(18) \quad \mathbf{R} = \int_s \rho \mathbf{F} dS - \frac{\partial}{\partial t} \int_s \rho \mathbf{v} dS + Q(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2).$$

Anche il Masoni (loc. cit., pag. 167) determina la risultante \mathbf{R} nel caso del moto non permanente, ma la formola che egli ottiene non concorda colla (18), perchè mentre egli trova il primo e terzo termine della nostra (18), ottiene, invece del secondo termine, l'espressione completamente differente:

$$- \rho \frac{\partial V_2}{\partial t} \sigma_2 (G_2 - G_1),$$

ove G_1, G_2 indicano i baricentri delle sezioni σ_1, σ_2 ; e quest'espressione proviene dalle ipotesi non bene giustificate, introdotte dal Masoni nel corso dei suoi calcoli.

Si può analogamente calcolare il momento risultante \mathbf{M} , rispetto ad un punto qualunque O ; supponendo ancor qui che le pressioni medie p_1^m, p_2^m non siano sensibilmente differenti da p_0 , si trova:

$$\mathbf{M} = \int_s \rho \mathbf{F} \wedge (\mathbf{P} - O) dS - \frac{\partial}{\partial t} \int_s \rho \mathbf{v} \wedge (\mathbf{P} - O) dS + Q[\mathbf{v}_1 \wedge (G_1 - O) - \mathbf{v}_2 \wedge (G_2 - O)],$$

ove G_1, G_2 sono i baricentri delle sezioni σ_1, σ_2 , riguardate come aree materiali di densità ρ .