ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVIII.

1911

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XX.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1911

Meccanica. — *Alcune formole analoghe a quelle del Volterra nella teoria delle distorsioni elastiche.* Nota di LUIGI GIUGANINO, presentata dal Corrispondente A. GARBASSO.

1. In una Nota inserita nei Rendiconti dell'Accademia dei Lincei [1], il Volterra ha dato una formola che esprime con quadrature le componenti dello spostamento di un solido elastico isotropo, quando siano conosciute le sei caratteristiche della deformazione, cioè le tre dilatazioni lineari ed i tre scorrimenti. E fondandosi sopra quella formola, egli faceva osservare che in un solido a connessione multipla tali caratteristiche possono essere funzioni monodrome delle coordinate (*deformazione regolare*), mentre le componenti dello spostamento sono polidrome: e ne deduceva notevoli proprietà dell'equilibrio elastico dei corpi a connessione multipla.

In questa Nota io stabilisco in modo molto semplice una formola analoga, in certo senso, a quella del Volterra, la quale esprime le componenti dello spostamento per mezzo delle componenti della rotazione elementare, e di tre funzioni armoniche determinate dalle condizioni al contorno: queste sei funzioni, che nei corpi semplicemente connessi sono necessariamente monodrome, nei solidi più volte connessi possono essere polidrome, senza che tali siano le componenti della deformazione.

Si ottengono, per tal guisa, delle relazioni che generalizzano, ed estendono ai solidi elastici quelle che in meccanica razionale esprimono lo spostamento d'un solido rigido in funzione della rotazione e traslazione d'una terna mobile di assi.

2. Siano u, v, w le componenti dello spostamento in un punto qualsiasi del solido elastico, e siano

$$(1)\quad \theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\,,\ \mathrm{P}=\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\,,\ \mathrm{Q}=\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\,,\ \mathrm{R}=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}$$

la dilatazione cubica, e le doppie componenti della rotazione elementare: λ, μ indichino le costanti di Lamé.

[1] Rend. Accad. dei Lincei, serie 5ª, t. XIV e XV.

Abbiamo le identità

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
&\Delta_2 u - \frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0\\
&\Delta_2 v - \frac{\partial\theta}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0\\
&\Delta_2 w - \frac{\partial\theta}{\partial z} + \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0\\
&\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0\,.
\end{aligned}
$$

Poichè le equazioni indefinite dell'equilibrio elastico si possono trasformare in guisa da eliminare le forze di massa, è lecito ammettere che esse siano della forma

$$
(3)\qquad
\begin{aligned}
&\mu\Delta_2 u + (\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x} = 0\\
&\mu\Delta_2 v + (\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial y} = 0\\
&\mu\Delta_2 w + (\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial z} = 0\,,
\end{aligned}
$$

oppure

$$
(3')\qquad
\begin{aligned}
&(\lambda+2\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x} - \mu\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) = 0\\
&(\lambda+2\mu)\frac{\partial\theta}{\partial y} - \mu\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) = 0\\
&(\lambda+2\mu)\frac{\partial\theta}{\partial z} - \mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0\,.
\end{aligned}
$$

Dalle (3) ed (1) segue che θ, P, Q, R sono funzioni armoniche, e le identità (2) divengono

$$
\begin{aligned}
&\Delta_2[u - \tfrac{1}{2}(x\theta - yR + zQ)] = 0\\
&\Delta_2[v - \tfrac{1}{2}(y\theta - zP + xR)] = 0\\
&\Delta_2[w - \tfrac{1}{2}(z\theta - xQ + yP)] = 0\,.
\end{aligned}
$$

Indicando con L, M, N tre funzioni armoniche da determinare con le condizioni al contorno, si ha

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
u &= \tfrac{1}{2}(x\theta - yR + zQ) + L\\
v &= \tfrac{1}{2}(y\theta - zP + xR) + M\\
w &= \tfrac{1}{2}(z\theta - xQ + yP) + N\,.
\end{aligned}
$$

L'aggiunta di costanti arbitrarie alle funzioni L, M, N, P, Q, R equivale a dare al solido uno spostamento rigido: e le (4) sono appunto le formole analoghe a quelle che in meccanica esprimono lo spostamento di un solido rigido in funzione della traslazione e rotazione di una terna mobile di assi.

Sostituendo i valori (4) nelle (1) si hanno quattro equazioni differenziali del primo ordine (di cui tre sole indipendenti) fra le sei funzioni L, M, N, P, Q, R.

Siano $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ le componenti della pressione esterna sulla superficie che limita il solido elastico, e ν la normale interna: le equazioni al contorno sono

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
&\lambda\theta \frac{\partial x}{\partial \nu} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial \nu} + \mu\left(R \frac{\partial y}{\partial \nu} - Q \frac{\partial z}{\partial \nu}\right) + \overline{X} = 0\\
&\lambda\theta \frac{\partial y}{\partial \nu} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial \nu} + \mu\left(P \frac{\partial z}{\partial \nu} - R \frac{\partial x}{\partial \nu}\right) + \overline{Y} = 0\\
&\lambda\theta \frac{\partial z}{\partial \nu} + 2\mu \frac{\partial w}{\partial \nu} + \mu\left(R \frac{\partial x}{\partial \nu} - P \frac{\partial y}{\partial \nu}\right) + \overline{Z} = 0 .
\end{aligned}
$$

Sostituendo in queste equazioni i valori (4) si ottengono tre equazioni lineari in $\frac{\partial L}{\partial \nu}, \frac{\partial M}{\partial \nu}, \frac{\partial N}{\partial \nu}$ rispettivamente; e quando si conoscono θ, P, Q, R $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ in superficie la determinazione di u, v, w si può ricondurre senza altro ai problemi di Dirichlet e di Neumann. Anzi, le (4) e (5) permettono di determinare completamente u, v, w per mezzo di *sole funzioni armoniche*, quando siano dati i valori di $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ al contorno, come farò vedere in altra Nota.

3. Supponiamo che il solido sia doppiamente connesso intorno all'asse delle z, e non incontri questo asse. Tale sarebbe il caso di un toro rispetto al suo asse di rotazione, o di un cilindro ellittico cavo avente le generatrici disposte all'intorno e parallelamente all'asse delle z.

Allora per mezzo delle (4) si trovano facilmente infiniti spostamenti polidromi a deformazione regolare, in modo che siano soddisfatte le (3), e le *costanti dei tagli*, relative alle distorsioni del Volterra, abbiano dei valori prefissati: anzi tali spostamenti polidromi possono essere determinati in guisa che θ, P, Q, R siano indipendenti da z, ed L, M, N siano funzioni lineari di z.

Questi varî spostamenti sono equilibrati da differenti sistemi di pressioni superficiali, dati dalle (5), e diversi, in generale, da zero.

Per vederlo poniamo

$$x + iy = \varphi(e^{\beta + i\alpha}) ,$$

essendo φ una funzione monodroma (almeno entro il solido elastico) della variabile complessa $\beta + i\alpha$.

Imponiamoci dapprima che sia anche

$$P = Q = w = 0 .$$

L'ultima (3') e l'ultima (2) sono soddisfatte identicamente: le due prime (3') indicano che μR è funzione armonica *coniugata* di $(\lambda + 2\mu)\,\theta$, e sono soddisfatte quando

$$(\lambda + 2\mu)\,\theta + i\mu R$$

è funzione della variabile complessa $x + iy$. Affinchè sieno soddisfatte tutte le (1) e (2) è necessario e sufficiente che sia

$$(6)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} &= -\frac{\lambda + 3\mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)}\left[x\frac{\partial.(\lambda + 2\mu)\,\theta}{\partial x} - y\frac{\partial.\mu R}{\partial x}\right] \\ \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} &= -\frac{\lambda + 3\mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)}\left[y\frac{\partial.(\lambda + 2\mu)\,\theta}{\partial x} - x\frac{\partial.\mu R}{\partial x}\right]. \end{aligned}$$

Siano L', M' le funzioni armoniche coniugate di L, M: moltiplicando l'ultima (6) per i, e sommando con la prima (6) viene

$$\frac{d[L + iL' + i(M + iM')]}{d(x + iy)} + \frac{1 + 3\mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)}(x + iy)\frac{g[(\lambda + 2\mu)\,\theta + i\mu R]}{d(x + iy)} = 0$$

od anche

$$(7)\qquad \frac{d[L + iL' + i(M + iM')]}{d(\beta + i\alpha)} + \frac{\lambda + 3\mu}{2\mu(\lambda + 2\mu)}\varphi(e^{\beta + i\alpha})\frac{d[(\lambda + 2\mu)\,\theta + i\mu R]}{d(\beta + i\alpha)} = 0 .$$

Possiamo determinare in infiniti modi delle funzioni monodrome di $x + iy$, $L_0 + iL'_0$, $M_0 + iM'_0$, $(\lambda + 2\mu)\,\theta_0 + i\mu R_0$ in modo che sia

$$L + iL' = -\frac{i}{2\pi}(l + il')(\beta + i\alpha) + L_0 + iL'_0$$

$$M + iM' = -\frac{i}{2\pi}(m + im')(\beta + i\alpha) + M_0 + iM'_0$$

$$(\lambda + 2\mu)\,\theta + i\mu R = \frac{\mu r}{\pi}(\beta + i\alpha) + (\lambda + 2\mu)\,\theta_0 + i\mu R_0$$

e sia soddisfatta l'equazione (7), qualunque siano i valori di l, m, r (costanti dei tagli). Quando α cresce di 2π, $L, M, \frac{1}{2}R$ crescono rispettivamente di l, m, r; ed u, v, invece di riprendere i valori iniziali, aumentano rispettivamente di $l - ry, m + rx$.

Calcolando invece le sei caratteristiche della deformazione con le note formole di Cauchy per la trasformazione di coordinate curvilinee ortogonali

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\dfrac{\partial x}{\partial \alpha}}{\left(\dfrac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\dfrac{\partial x}{\partial \beta}}{\left(\dfrac{\partial x}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial \beta}\right)^2} \frac{\partial u}{\partial \beta} \quad \text{ecc.,}$$

si vede che esse risultano monodrome in x, y.

In questo caso le componenti dello spostamento sono dunque

$$(8) \qquad \begin{aligned} u' &= \tfrac{1}{2}(x\theta - y\mathrm{R}) + \mathrm{L} \\ v' &= \tfrac{1}{2}(y\theta + x\mathrm{R}) + \mathrm{M} \\ w' &= 0 . \end{aligned}$$

In secondo luogo poniamo $\theta = \mathrm{R} = 0$.

Le (3′) sono soddisfatte col porre

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial z} = \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial z} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} = 0 ,$$

e l'ultima (2) col fare $\dfrac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y} = 0$: così $\mathrm{Q} + i\mathrm{P}$ è funzione della variabile complessa $x + iy$.

Per soddisfare la seconda e terza (1) basta in luogo di L, M porre $z\Phi'$, $z\Phi$ e

$$(9) \qquad \begin{aligned} \Phi &= \tfrac{1}{2}\left(y \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} + x \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y}\right) + \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial y} \\ \Phi' &= \tfrac{1}{2}\left(y \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} - x \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y}\right) + \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x} ; \end{aligned}$$

mentre la prima e quarta (1) sono soddisfatte per

$$(9') \qquad \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial z} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi'}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Phi'}{\partial y} = 0 .$$

Evidentemente le (9), (9′) sono compatibili fra loro.

Così N è funzione armonica di x, y sole: se N' è una funzione armonica coniugata di N, ed $N_0 + iN'_0$ una qualsiasi funzione monodroma di $x + iy$, possiamo porre

$$N + iN' = \frac{i}{2\pi}(n + in')(\beta + i\alpha) + N_0 + iN'_0 .$$

Analogamente sia $Q_0 + iP_0$ una funzione monodroma di $x + iy$, e

$$Q + iP = \frac{1}{\pi}(p - iq)(\beta + i\alpha) + Q_0 + iP_0 .$$

Lo spostamento di componenti

$$(10)\qquad \begin{aligned} u'' &= \tfrac{1}{2} zQ + z\Phi' \\ v'' &= -\tfrac{1}{2} zP + z\Phi \\ w'' &= \tfrac{1}{2}(-xQ + yP) + N \end{aligned}$$

è polidromo; e quando α cresce di 2π, u'', v'', w'', invece di riprendere i valori iniziali crescono di qz, $-pz$, $n - qx + py$ rispettivamente.

Invece le componenti della deformazione sono funzioni monodrome di x, y, z.

Infine lo spostamento di componenti $u' + u''$, $v' + v''$, w', w'' è polidromo, e le sei caratteristiche della *distorsione* del Volterra sono l, m, n, p, q, r.

In un'altra Nota mi propongo di esaminare qualche caso particolare per confrontare i risultati della teoria con i dati dell'esperienza.

Fisica. — *Lo studio sperimentale del fenomeno di Hall e la teoria elettronica dei metalli.* Nota di O. M. CORBINO, presentata dal Socio P. BLASERNA.

1. La interpretazione dei fenomeni galvano e termomagnetici secondo la teoria elettronica della conduzione metallica è abbastanza soddisfacente finchè ci si limita al loro studio qualitativo. Notevoli difficoltà sorgono invece quando dalla ricerca quantitativa, confrontata con le formole della teoria, si voglia risalire alle costanti primitive caratteristiche del metallo. Già il Drude tentò una simile deduzione; e dei risultati non sempre soddisfacenti attribuì la causa al fatto che i diversi valori sperimentali adoperati nel calcolo erano stati ricavati da esperienze che sperimentatori diversi avevano eseguito con materiali diversi.

Ma quando lo Zahn [1], con una serie di misure veramente pregevoli, determinò i coefficienti sperimentali pei diversi fenomeni sullo stesso campione

[1] Zahn, Ann. d. Physik; *14*, pag. 905, 1904.