ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVIII.

1911

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XX.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1911

Così N è funzione armonica di x, y sole: se N′ è una funzione armonica coniugata di N, ed $N_0 + iN'_0$ una qualsiasi funzione monodroma di $x + iy$, possiamo porre

$$N + iN' = \frac{i}{2\pi}(n + in')(\beta + i\alpha) + N_0 + iN'_0 .$$

Analogamente sia $Q_0 + iP_0$ una funzione monodroma di $x + iy$, e

$$Q + iP = \frac{1}{\pi}(p - iq)(\beta + i\alpha) + Q_0 + iP_0 .$$

Lo spostamento di componenti

$$(10)\qquad \begin{aligned} u'' &= \tfrac{1}{2} zQ + z\Phi' \\ v'' &= -\tfrac{1}{2} zP + z\Phi \\ w'' &= \tfrac{1}{2}(-xQ + yP) + N \end{aligned}$$

è polidromo; e quando α cresce di 2π, u'', v'', w'', invece di riprendere i valori iniziali crescono di qz, $-pz$, $n - qx + py$ rispettivamente.

Invece le componenti della deformazione sono funzioni monodrome di x, y, z.

Infine lo spostamento di componenti $u' + u''$, $v' + v''$, w', w'' è polidromo, e le sei caratteristiche della *distorsione* del Volterra sono l, m, n, p, q, r.

In un'altra Nota mi propongo di esaminare qualche caso particolare per confrontare i risultati della teoria con i dati dell'esperienza.

Fisica. — *Lo studio sperimentale del fenomeno di Hall e la teoria elettronica dei metalli.* Nota di O. M. Corbino, presentata dal Socio P. Blaserna.

1. La interpretazione dei fenomeni galvano e termomagnetici secondo la teoria elettronica della conduzione metallica è abbastanza soddisfacente finchè ci si limita al loro studio qualitativo. Notevoli difficoltà sorgono invece quando dalla ricerca quantitativa, confrontata con le formole della teoria, si voglia risalire alle costanti primitive caratteristiche del metallo. Già il Drude tentò una simile deduzione; e dei risultati non sempre soddisfacenti attribuì la causa al fatto che i diversi valori sperimentali adoperati nel calcolo erano stati ricavati da esperienze che sperimentatori diversi avevano eseguito con materiali diversi.

Ma quando lo Zahn [1], con una serie di misure veramente pregevoli, determinò i coefficienti sperimentali pei diversi fenomeni sullo stesso campione

[1] Zahn, Ann. d. Physik; *14*, pag. 905, 1904.

di metallo ben puro e di nota provenienza, e volle poi passare alla deduzione delle costanti, l'esito fu ancora men fortunato. Egli pervenne invero a un sistema di valori che era assurdo in se stesso; per esempio le mobilità degli ioni dei due segni venivano espresse da numeri negativi.

Malgrado ciò difficilmente si può attribuire ai presupposti della teoria la causa dell'insuccesso. Nel sistema di equazioni che legano le quantità sperimentalmente misurabili e le costanti da determinare queste sono frammiste nel modo più vario; e perciò basta che un solo dei dati sperimentali sia inesatto o mal sicuro, perchè ne venga inficiata, e gravemente, l'attendibilità dell'intera soluzione. E questo è purtroppo il caso, poichè qualcuno dei fenomeni è molto difficile ad accertare e a misurare con la esattezza che sarebbe desiderabile.

Ma a parte le difficoltà sperimentali, che potranno superarsi raffinando ancora più i metodi di ricerca, un altro esame s'impone sin da ora; quello di alcune ipotesi accessorie poste per semplificare la teoria, e che non sempre son soddisfatte nella realizzazione delle esperienze.

2. Il caso più caratteristico è presentato, al riguardo, dalla teoria del fenomeno di Hall, pel quale il coefficiente R della teoria di Drude non può corrispondere a quello che si determina sperimentalmente. L'esperienza dimostra che la differenza di potenziale V creata dal campo H tra due punti dei bordi d'una lamina percorsa da una corrente di densità j è esprimibile con la formola

$$V = RjHb\,,$$

nella quale b misura la larghezza della lamina ed R è un coefficiente positivo o negativo caratteristico del metallo.

Il calcolo del coefficiente R, in funzione delle costanti della teoria, è fatto dal Drude supponendo che la lamina sia trasversalmente isolata, termicamente ed elettricamente, nel qual caso le equazioni che reggono il movimento degli elettroni sono le seguenti, adottando le unità elettrostatiche:

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\alpha_1 \frac{\partial T}{\partial y} = e\left(Y - \frac{H}{c}\frac{d\xi_1}{dt}\right)\\
&\alpha_2 \frac{\partial T}{\partial y} = -e\left(Y - \frac{H}{c}\frac{d\xi_2}{dt}\right)\\
&\frac{d\xi_1}{dt} = v_1\left(eX - \alpha_1 \frac{\partial T}{\partial x}\right)\\
&\frac{d\xi_2}{dt} = v_2\left(-eX - \alpha_2 \frac{\partial T}{\partial x}\right)\\
&j = e\left(N_1 \frac{d\xi_1}{dt} - N_2 \frac{d\xi_2}{dt}\right).
\end{aligned}\right.$$

Il significato dei diversi simboli è il seguente:

c è la velocità della luce;

$\alpha_1 = \frac{4\alpha T}{3} \frac{d \log N_1}{dT}$, in cui α designa la costante dei gas, T la temperatura del metallo, N_1 il numero dei ioni positivi per cm. cubo;

α_2 è la grandezza analoga ad α_1 per gli ioni negativi;

e rappresenta la carica elettrica comune agli elettroni dei due segni, presa col suo valore numerico;

$\frac{\partial T}{\partial x}$, $\frac{\partial T}{\partial y}$ sono i gradienti di temperatura lungo la lamina nel senso longitudinale x della corrente elettrica e nel senso trasversale y;

X e Y la forza elettrica nel senso x e nel senso y;

$\frac{d\xi_1}{dt}$ e $\frac{d\xi_2}{dt}$ le velocità degli ioni positivi e negativi, nel senso x;

v_1 e v_2 le mobilità corrispondenti cioè le velocità assunte dagli ioni sotto la forza 1.

Queste equazioni permettono di dedurre due delle grandezze Y, $\frac{\partial T}{\partial x}$, j, $\frac{\partial T}{\partial y}$ quando siano date le altre.

Per il calcolo del coefficiente R del fenomeno Hall il Drude suppone $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$, e identifica il campo Y con la f. e. m. di Hall per unità di larghezza della lamina. Ma entrambe le ipotesi non corrispondono alle condizioni dell'esperienza.

E infatti il gradiente $\frac{\partial T}{\partial x}$ che comparisce nella formola non è quello che il solo campo produce, ma quello che in realtà si determina tra i posti d'entrata e d'uscita della corrente, risultante dall'effetto Peltier, dalle eventuali differenze nell'effetto Joule ecc. Al gradiente di temperatura, effettivamente esistente, seguirà una differenza di temperatura trasversale (effetto Righi) che altererà il $\frac{\partial T}{\partial y}$; e un campo elettrico (effetto Ettingshausen) che modificherà il valore di Y. La formola di Drude andrebbe quindi corretta in questo senso; e si può dimostrare che il nuovo valore di Y è dato, in funzione di j e di $\frac{\partial T}{\partial x}$, da

$$Y = \frac{H}{c(N_1 v_1 + N_2 v_2)(\alpha_1 + \alpha_2)} \times$$
$$\times \left\{ j \frac{\alpha_2 v_1 - \alpha_1 v_2}{e} + (\alpha_1 N_1 + \alpha_2 N_2)(v_1 \alpha_2 + v_1 \alpha_2) \frac{\partial T}{\partial x} \right\}$$

che si riduce alla formola di Drude per $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$. La correzione potrebbe essere tutt'altro che indifferente in certi casi.

Ma in un altro punto l'applicazione sperimentale della formola di Drude conduce a risultati non corretti.

Il campo Y misura la f. e. m. per unità di lunghezza esistente nell'interno della lamina e agente perciò sugli elettroni in moto. Ma non è permesso identificarla con la differenza di potenziale V che si constata ai bordi della lamina, anche ricorrendo a elettrodi della stessa natura, o effettuando la correzione della forza termoelettrica aggiunta con le sonde di altro metallo come fece lo Zahn.

E invero tra i bordi della lamina esiste una differenza di temperatura, per il gradiente trasversale $\frac{\partial T}{\partial y}$. E perciò lungo le sonde dello *stesso metallo*, fino all'apparecchio esploratore della differenza di potenziale, si aggiunge la differenza di potenziale propria della caduta di temperatura, cui è dovuto l'effetto Thomson. Questo campo supplementare Y′ costituisce una parte del campo Y esistente nella lamina e dato dalle (1) che tengono conto di tutto, poichè nella lamina esiste il gradiente $\frac{\partial T}{\partial y}$; ma mentre i suoi effetti sul moto degli ioni sono effettivamente esistenti, la sua osservazione ci sfugge ricorrendo alle sonde, ove se ne crea uno opposto, e si perviene perciò a una valutazione scorretta del campo Y. Analogamente può dimostrarsi che, per la stessa ragione, è insufficiente la correzione dello Zahn nel caso di sonde costituite da un metallo diverso, la quale ha solo per effetto di ricondurre la differenza di potenziale osservata a quella che si avrebbe con sonde dello stesso metallo.

Si vede da tutto ciò che un confronto esatto della formola teorica coi risultati dell'esperienza è molto difficile, e richiede inoltre una valutazione esatta di $\frac{\partial T}{\partial x}$, che a torto fu supposto nullo nella teoria di Drude.

3. Ben diverse sono le condizioni qualora, come ha fatto lo Zahn in una interessante ricerca [1], s'immerga la lamina in una massa d'acqua che si rinnova rapidamente e che rende perciò in tutta la lamina costante la temperatura.

Ma a tal caso non corrispondono più le formole (1) della teoria, le quali presuppongono invece che la lamina sia trasversalmente isolata anche termicamente. Per la trattazione di questo caso, che può chiamarsi col Zahn caso isotermico, occorrerà introdurre le componenti $\frac{d\eta_1}{dt}$, $\frac{d\eta_2}{dt}$ della velocità degli ioni nel senso y, e scrivere che la lamina è trasversalmente isolata

[1] Zahn, Ann. d. Phys. *23*, pag. 131, 1907.

solo per la corrente elettrica. Si ottiene così, in unità elettromagnetiche,

$$
(2)\qquad
\left\{
\begin{aligned}
\frac{d\xi_1}{dt} &= \quad ev_1(\mathrm{X} - \mathrm{H}ev_1\mathrm{Y})\,\frac{1}{1+\mathrm{H}^2e^2v_1^2}\\
\frac{d\xi_2}{dt} &= -\,ev_2(\mathrm{X} + \mathrm{H}ev_2\mathrm{X})\,\frac{1}{1+\mathrm{H}^2e^2v_2^2}\\
\frac{d\eta_1}{dt} &= \quad ev_1(\mathrm{Y} + \mathrm{H}ev_1\mathrm{X})\,\frac{1}{1+\mathrm{H}^2e^2v_1^2}\\
\frac{d\eta_2}{dt} &= -\,ev_2(\mathrm{Y} - \mathrm{H}ev_2\mathrm{X})\,\frac{1}{1+\mathrm{H}^2e^2v_2^2}\\
j_x &= e\left(\mathrm{N}_1\frac{d\xi_1}{dt} - \mathrm{N}_2\frac{d\xi_2}{dt}\right)\\
j_y &= e\left(\mathrm{N}_1\frac{d\eta_1}{dt} - \mathrm{N}_2\frac{d\eta_2}{dt}\right) = 0\,.
\end{aligned}
\right.
$$

Da queste equazioni, posto

$$
(3)\qquad \sigma_1 = e^2\mathrm{N}_1 v_1 \quad , \quad \sigma_2 = e^2\mathrm{N}_2 v_2
$$

$$
\sigma = \sigma_1 + \sigma_2
$$

si deduce

$$
\mathrm{Y} = \frac{\sigma_1 v_1 - \sigma_2 v_2}{\sigma}\, e\mathrm{HX}.
$$

Indicando poi con σ' la conducibilità elettrica della sostanza sotto l'azione del campo magnetico, posto cioè

$$
\sigma' = \frac{j}{\mathrm{X}}
$$

si avrà

$$
\mathrm{Y} = \frac{\sigma_1 v_1 - \sigma_2 v_2}{\sigma}\, e\mathrm{H}\,\frac{j}{\sigma'}\,.
$$

E quindi il coefficiente di Hall isotermico R_T sarà

$$
\mathrm{R}_\mathrm{T} = \frac{\mathrm{E}}{\sigma'}\,,
$$

ove E denota il coefficiente da cui dipendono le azioni elettromagnetiche di di 2ª specie, che io ho chiamato momento ionico differenziale:

$$
\mathrm{E} = \frac{e\,v_1\,\sigma_1 - e\,v_2\,\sigma_2}{\sigma}\,.
$$

Adunque il coefficiente del fenomeno di Hall isotermico, il solo che possa senza ambiguità determinarsi con l'esperienza, non è dato dalla formola di Drude, ma si rilega col momento ionico differenziale E da cui dipendono le azioni elettromagnetiche di seconda specie già da me considerate nelle antecedenti ricerche.

4. La teoria ci può essere d'altra parte di guida preziosa per rintracciare le condizioni sperimentali più favorevoli alla ricerca delle costanti del metallo.

Abbiamo visto che nel caso isotermico la misura del fenomeno Hall ci fornisce il valore del coefficiente

$$E = \frac{ev_1\sigma_1 - ev_2\sigma_2}{\sigma}.$$

Inoltre la misura della differenza di temperatura trasversale per una corrente termica longitudinale (effetto Righi) ci fornisce il coefficiente

$$S = \frac{e}{c\sigma}(\sigma_2 v_1 - \sigma_1 v_2).$$

Infine se con l'apparecchio di Zahn, nel quale si può sovrapporre alla corrente elettrica longitudinale un flusso di calore nel medesimo senso, si creano due flussi tali da ottenere che sia $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$, allora le formole (1) di Drude ci dànno la relazione interessante

$$Y = \frac{Hj}{ce(N_1 - N_2)},$$

da cui si può dedurre $N_1 - N_2$ misurando Y che in questo caso si identifica con la differenza di potenziale trasversale.

Chiamiamo R_1 il coefficiente di questo particolare fenomeno di Hall osservabile quando è $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$ e $\frac{\partial T}{\partial x}$ ha il valore conveniente perchè questo si ottenga a lamina isolata. Avremo le relazioni semplicissime che qui riassumo:

$$R_1 = \frac{1}{ce(N_1 - N_2)}$$

$$E = \frac{ev_1\sigma_1 - ev_2\sigma_2}{\sigma}$$

$$S = \frac{e}{c}\,\frac{\sigma_2 v_1 - \sigma_1 v_2}{\sigma}$$

le quali unite alle (3) ci permetteranno di determinare le quattro costanti più notevoli del metallo N_1, N_2, v_1 e v_2, in funzione di R_1, E, S e della conducibilità σ del metallo.

Una simile ricerca, presenterebbe il più grande interesse, poichè, mentre le formole sono senza obbiezione, ciascuno dei dati sperimentali è rilegato con un minor numero di costanti che non nelle formole di Drude.

5. Un esame analogo a quello eseguito per la teoria del fenomeno di Hall può anche farsi per la teoria degli effetti elettromagnetici di cui mi sono occupato in alcune precedenti Comunicazioni.

Pel caso della corrente elettrica radiale, contro la condizione supposta che le linee di egual potenziale siano delle circonferenze, non c'è nulla da obbiettare; e così non c'è dubbio che quelle linee sono anche isotermiche. Occorre invece tener conto di un eventuale gradiente radiale di temperatura dovuto all'effetto Peltier o a quello Joule, non uguale al centro e alla periferia. Un flusso radiale di corrente elettrica appare perciò inseparabile da un flusso radiale di calore, cosicchè si sovrapporranno sullo stesso disco le correnti circolari di doppia origine che lo trasformano, come ho dimostrato, in una particolare lamina magnetica.

Malgrado ciò l'azione induttiva sulla bobina che circonda il disco (1ª Nota) non sarà modificata, poichè all'atto in cui s'invia o si interrompe la corrente radiale e si accerta l'azione induttiva, il gradiente di temperatura non si è formato, o resta invariato, per la sensibile capacità termica del disco. Invece questa sovrapposizione dei due effetti si potrà manifestare nella rotazione del disco percorso da corrente radiale; poichè la misura della coppia richiede un certo tempo, e può allora prodursi una eventuale differenza di temperatura tra il centro e la periferia, e quindi una rotazione del disco di origine termomagnetica.

La correzione può essere facilmente apportata esplorando con gli stessi fili adduttori della corrente la differenza di temperatura creata da questa tra il centro e la periferia, desumibile dalla conseguente forza elettromotrice termoelettrica [1].

[1] Desidero rilevare un lieve errore di calcolo in cui sono incorso nelle mie Note a pp. 424 e 569 di questo volume, quando mi occorse di valutare l'energia mutua del campo e del disco percorso da corrente radiale elettrica e termica.

L'energia nel campo H d'un anellino di raggio r e larghezza dr, il quale si comporta come se fosse percorso dalla corrente $\frac{\mathrm{EHI}}{2\pi r}dr$, è solo metà di quella da me usata nel calcolo, poichè la corrente indicata non è costante ma dipende da H. In conseguenza il valore di W è solo metà di quello dato dalla formola (5) di pag. 425 e vanno in conformità modificate le formole e i risultati numerici seguenti.

Lo stesso può dirsi per quanto è contenuto nel § 4 della mia Nota del 23 aprile (pag. 573); in esso per la stessa ragione e per correggere un secondo errore di stampa il coefficiente di W e di M deve leggersi $\frac{1}{8\pi}$ anzichè $\frac{1}{2\pi}$.