ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVIII.

1911

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XX.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1911

dove U , U_1 sono funzioni arbitrarie di u, V, V_1 di v e $z(u, v)$ una funzione arbitraria di (u, v). Così per. es. su qualunque superficie due serie di piani paralleli intersecano una rete deformabile di curve rigide. Il ben noto esempio della rete delle sezioni circolari di una quadrica rientra in questo caso colla ulteriore particolarità che, deformando la rete, la superficie sostegno resta sempre una quadrica. Ed ancora: nell'esempio più generale dianzi addotto della rete intersecata sopra una superficie qualunque da due serie di piani paralleli, al deformarsi della rete, la superficie sostegno passa per una serie di configurazioni *affini*.

In fine osserviamo che nelle (28) prendiamo

$$z = U_2 + V_2 ,$$

cioè z somma di due funzioni, una di u, l'altra di v, abbiamo la più generale superficie di traslazione sulla quale la rete delle curve generatrici è una rete deformabile di curve rigide. In questo caso gli spostamenti dei punti della rete possono avvenire parallelamente a qualunque piano.

Matematica.— *Equazioni integro-differenziali con limiti costanti.* Nota del Socio Vito Volterra.

1. Nella mia prima Nota sulle equazioni integro-differenziali [1], in cui ho considerato la equazione integro-differenziale

$$(\mathrm{I})\qquad \Delta^2 u(t) + \int_0^t \left\{ \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial x^2} f(t, \tau) + \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial y^2} \varphi(t, \tau) + \frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial z^2} \psi(t, \tau) \right\} d\tau = 0 ,$$

ho accennato alla possibilità di estendere l'analisi ad equazioni integro-differenziali con limiti costanti. Mi permetto qui di trattare questo argomento, valendomi dei principii esposti in alcune Note nelle quali ho introdotto la considerazione delle funzioni permutabili e delle operazioni di composizione [2]. Già in una di queste Note avevo avuto occasione di studiare equazioni integro-differenziali con limiti costanti, le quali conducono ad una classe di trascendenti uniformi che comprendono le funzioni ellittiche, ma in tali equazioni compariva una sola variabile di derivazione, e quindi esse dal lato differenziale potevano compararsi alle equazioni differenziali ordinarie. In questa Nota considererò invece delle equazioni integro-differenziali con limiti costanti, le quali dal lato differenziale possono, al pari della (I), compararsi alle equazioni a derivate parziali.

[1] Rend. Acc. dei Lincei, 21 febbraio 1909, § 1.

[2] Rend. Acc. dei Lincei, 20 febbraio 1910. *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali.* — Ibid., *Sopra le funzioni permutabili*, 17 aprile 1910.

2. Consideriamo la equazione integro-differenziale

$$\text{(II)} \qquad \sum_1^p {}_i \frac{\partial^2 u(x_1, x_2 \dots x_p | t)}{\partial x_i^2} + \int_0^1 \sum_1^p {}_i \frac{\partial^2 u(x_1, x_2 \dots x_p | \tau)}{\partial x_i^2} f_i(t, \tau)\, d\tau = 0 .$$

Come equazione aggiunta assumeremo

$$\text{(II')} \qquad \sum_1^p {}_i \frac{\partial^2 v(x_1, x_2 \dots x_p | t)}{\partial x_i^2} + \int_0^1 \sum_1^p {}_i \frac{\partial^2 v(x_1, x_2 \dots x_p | \tau)}{\partial x_i^2} f_i(\tau, t)\, d\tau = 0 ,$$

ed avremo il teorema di reciprocità espresso dalla formula

$$\text{(III)} \qquad 0 = \mathrm{K}_\sigma([u, v]) = \int_0^1 dt \left\{ \int_\sigma \left(v(t) \frac{\partial u(t)}{\partial n} - u(t) \frac{\partial v(t)}{\partial n} \right) d\sigma + \right.$$

$$\left. + \int_0^1 d\tau \int_\sigma \sum_1^p {}_i \left(v(t) \frac{\partial u(\tau)}{\partial x_i} - u(\tau) \frac{\partial v(t)}{\partial x_i} \right) f_i(t, \tau) \cos n x_i \, d\sigma \right\}$$

ove σ è il contorno di un iperspazio S_p nel campo $x_1, x_2, \dots x_p$ e n ne è la normale esterna.

3. Si tratta ora di trovare la soluzione fondamentale dell'equazione aggiunta, e a tal fine sostituiamo $z f_i(t, \tau)$ a $f_i(t, \tau)$, onde le (II) e (II') diverranno

$$\text{(II}_a) \qquad \sum_1^p {}_i \frac{\partial^2 u(x_1, x_2 \dots x_p | t)}{\partial x_i^2} + z \int_0^1 \sum_1^p {}_i \frac{\partial^2 u(x_1, x_2 \dots x_p | \tau)}{\partial x_i^2} f_i(t, \tau)\, d\tau = 0$$

$$\text{(II}'_a) \qquad \sum_1^p {}_i \frac{\partial^2 v(x_1, x_2 \dots x_p | t)}{\partial x_i^2} + z \int_0^1 \sum_1^p {}_i \frac{\partial^2 v(x_1, x_2 \dots x_p | \tau)}{\partial x_i^2} f_i(\tau, t)\, d\tau = 0.$$

Ripetendo dei calcoli analoghi a quelli eseguiti per ottenere la funzione fondamentale nella prima delle Note precedentemente citate [1] noi avremo come funzione fondamentale della (II$'_a$), nella ipotesi $p > 2$,

$$(1) \qquad \mathrm{V}(x_1, x_2 \dots x_p | t) = \mathrm{F}(t)\, r^{2-p} +$$

$$+ \int_0^1 \sum_1^\infty {}_m \frac{(-1)^m \, \mathrm{F}(\xi)\, z^m \, d\xi}{2 . 4 \dots 2m . (4-p)(6-p) \dots (2(m+1)-p)} \times$$

$$\times \sum_{h_1 + \dots + h_p = m} \frac{\partial^{2m} r^{2(m+1)-p}}{\partial x_1^{2h_1} \dots \partial x_p^{2h_p}} \mathrm{F}_{h_1, \dots h_p}(\xi, t) ,$$

ove $\mathrm{F}(t)$ è una funzione arbitraria, e

$$r = \sqrt{\sum_1^p {}_i (x_i - a_i)^2}$$

$$f_1(t, \tau) = \mathrm{F}_{1,0,\dots 0}(t, \tau) , \; f_2(t, \tau) = \mathrm{F}_{0,1 \dots 0}(t, \tau) , \dots f_p(t, \tau) = \mathrm{F}_{0,0 \dots 1}(t, \tau) .$$

$$\mathrm{F}_{h_1, h_2 \dots h_p}(t, \tau) = \int_0^1 \sum_{q_1 + q_2 + \dots + q_p = \rho} \mathrm{F}_{q_1, q_2 \dots q_p}(t, \xi)\, \mathrm{F}_{h_1 - q_1, h_2 - q_2 \dots h_p - q_p}(\xi, \tau)\, d\xi .$$

(1) Rend. Acc. Lincei, 21 febbraio 1909, § 5.

La somma $\sum_{q_1+q_2+\cdots+q_p=\rho}$ si intende estesa a tutti i valori interi di $q_1, q_2, \ldots q_p$ la cui somma è costante ed eguali a ρ mentre si suppone che una F con indici negativi sia nulla.

La serie (1) sarà convergente finchè $|z|$ sarà inferiore ad un dato limite.

Ciò premesso supponiamo che $f_1, f_2 \ldots f_p$ siano funzioni fra loro permutabili di 2ª specie ([1]). Allora, facendo uso della notazione, usata nella Nota ora citata, per denotare la operazione di composizione di seconda specie, potremo scrivere

$$F_{h_1,h_2\ldots h_p}(t\,,\tau) = N_{h_1,h_2\ldots h_p}\,\ddot{f}_1^{h_1}\,\ddot{f}_2^{h_2}\ldots\ddot{f}_p^{h_p}(t\,,\tau),$$

in cui $N_{h_1,h_2\ldots h_p}$ è un numero facilmente calcolabile mediante $h_1, h_2, \ldots h_p$. Avremo quindi che la (1) potrà scriversi

$$(1')\qquad V(x_1\,, x_2 \ldots x_p|t) = F(t)\, r^{2-p} + $$
$$+ \int_0^1 \sum_1^\infty{}_m \frac{(-1)^m F(\xi)\, z^m\, d\xi}{2\,.\,4 \ldots 2m\,.\,(4-p)\,(6-p)\ldots(2(m+1)-p)} \times$$
$$\times \sum_{h_1+\cdots+h_p=m} N_{h_1,\ldots h_p} \frac{\partial^{2m}\, r^{2(m+1)-p}}{\partial x_1^{2h_1}\ldots \partial x_p^{2h_p}}\,\ddot{f}_1^{h_1}\ldots\ddot{f}_p^{h_p}(\xi\,, t).$$

4. Prendiamo ora l'equazione differenziale

$$\sum_1^p{}_i \frac{\partial^2 W}{\partial x_i^2} + z \sum_1^p{}_i\, m_i \frac{\partial^2 W}{\partial x_i^2} = 0\,.$$

Purchè $|z|$ sia inferiore ad un certo limite, la soluzione fondamentale potrà scriversi

$$W = Cr^{2-p} + \frac{(-1)^m\, Cz^m}{2\,.\,4 \ldots 2m\,.\,(4-p)\,(6-p)\ldots(2(m+1)-p)} \times$$
$$\times \sum_{h_1+\cdots+h_p=m} N_{h_1,\ldots h_p} \frac{\partial^{2m}\, r^{2(m+1)-p}}{\partial x_1^{2h_1}\ldots\partial x_p^{2h_p}}\, m_1^{h_1}\ldots m_p^{h_p}\,,$$

ove C denota una costante arbitraria.

Ma questa stessa soluzione può mettersi anche sotto la forma

$$W = \frac{C}{\left(\sum_1^p{}_i \frac{(x_i-a_i)^2}{1+zm_i}\right)^{\frac{p-2}{2}}},$$

([1]) Rend. Acc. dei Lincei, 20 febbraio 1910, *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali*, § 8.

e, se supponiamo $p = 2q$ con $q > 1$ e intero, avremo

$$W = \frac{C}{\left(\sum_1^{2q} i \frac{(x_i - a_i)^2}{1 + z m_i}\right)^{q-1}},$$

ossia W sarà razionale in z, e potrà ancora scriversi

$$W = \frac{C}{r^{2q-2}} \frac{[(1 + z m_1)(1 + z m_2) \dots (1 + z m_{2q})]^{q-1}}{\left\{1 + \sum_1^{2q} i \frac{(x_i - a_i)^2}{r^2} [(1 + z m_1) \dots (1 + z m_{i-1})(1 + z m_{i+1}) \dots (1 + z m_{2q}) - 1]\right\}^{q-1}}.$$

5. Da quanto è ora stato ottenuto si deduce il modo seguente per calcolare la richiesta funzione fondamentale della equazione aggiunta (II'_a).

Sia $f_{1,2,\dots,2q}^{(1)}(t, \tau)$ la somma algebrica delle funzioni $f_1(t, \tau), f_2(t, \tau) \dots f_{2q}(t, \tau)$. Denotiamo con $f_{1,2,\dots,2q}^{(2)}(t, \tau)$ la somma algebrica delle funzioni ottenute componendo due a due le funzioni stesse, con $f_{1,2,\dots,2q}^{(3)}(t, \tau)$ la somma algebrica delle funzioni ottenute componendole tre a tre e così di seguito.

Formiamo

$$z f_{1,2\dots 2q}^{(1)}(t, \tau) + z^2 f_{1,2,\dots,2q}^{(2)}(t, \tau) + \dots + z^{2q} f_{1,2,\dots,2q}^{(2q)}(t, \tau) = \chi(t, \tau)$$

quindi

$$(q-1)\chi(t, \tau) + \frac{(q-1)(q-2)}{1.2} \ddot{\chi}^2(t, \tau) + \\ + \frac{(q-1)(q-2)(q-3)}{1.2.3} \ddot{\chi}^3(t, \tau) + \dots + \ddot{\chi}^{q-1}(t, \tau) = \Lambda(t, \tau)$$

e

$$F(t) + \int_0^1 F(\xi) \Lambda(\xi, t)\, d\xi = \Phi(t).$$

Si calcoli poi

$$z f_{1\,2\dots i-1,\, i+1,\dots 2q}^{(1)}(t, \tau) + z^2 f_{1,2\dots i-1,\, i+1,\dots 2q}^{(2)}(t, \tau) + \dots z^{2q} f_{1,2\dots i-1,\, i+1,\dots 2q}^{(2q-2)}(t, \tau) = \Psi_i(t, \tau),$$

$$\sum_1^{2q} i \frac{(x_i - a_i)^2}{r^2} \Psi_i(t, \tau) = \Psi(t, \tau),$$

$$(q-1)\Psi(t, \tau) + \frac{(q-1)(q-2)}{1.2} \ddot{\Psi}^2(t, \tau) + \\ + \frac{(q-1)(q-2)(q-3)}{1.2.3} \ddot{\Psi}^3(t, \tau) + \dots + \ddot{\Psi}^{q-1}(t, \tau) = \Theta(t, \tau),$$

e si risolva l'equazione integrale

$$V(t) + \int_0^1 V(\xi) \Theta(\xi, t)\, d\xi = \Phi(t). \tag{2}$$

$V(t)$ così ottenuto sarà evidentemente funzione anche di $x_1, x_2, \dots x_{2q}$ e di z, e coinciderà colla (1'). Inoltre essa sarà una *funzione meromorfa di z* la cui espressione verrà ottenuta come rapporto di due funzioni olomorfe di z.

6. Dalla (II') segue:

$$\int_\sigma \frac{\partial V(t)}{\partial n} d\sigma + \int_0^1 d\tau \int_\sigma \sum \frac{\partial V(\tau)}{\partial x_i} f_i(\tau, t) \cos n x_i \, d\sigma =$$

$$= -2q(2q-2)\frac{(2\pi)^q}{2.4 \ldots 2q} F(t),$$

supponendo che il polo $(a_1, a_2, \ldots a_{2q})$ sia interno all'iperspazio limitato dal contorno σ. Questa formula vale prendendo per V l'espressione meromorfa che si ricava dalla equazione integrale (2), comunque grande sia $|z|$, esclusi i valori di z che annullano il determinante della equazione integrale.

Prendendo nella (III) $v = V$ ed escludendo il polo mediante uno spazio sferico che si fa tendere a zero, si trova al limite

$$K_\sigma([u, V]) = 2q(2q-2)\frac{(2\pi)^q}{2.4 \ldots 2q}\int_0^1 F(t)\, u_0(t)\, dt,$$

ove $u_0(t)$ denota il valore di $u(x_1, \ldots x_{2q}|t)$ al polo. Da questa formula si ricava subito $u_0(t)$, essendo $F(t)$ una funzione arbitraria.

Matematica. — *Sulla funzione potenziale di spazio corrispondente ad una assegnata azione esterna.* Nota del Corrispondente G. Lauricella.

È noto che, data l'azione esterna di un corpo (in particolare della terra), si possono far corrispondere ad essa infiniti modi differenti di variazioni della densità del corpo, ed è noto ancora che sono però pienamente determinati alcuni elementi meccanici relativi al corpo stesso dipendenti dalla densità. Un notevole contributo allo studio della anzidetta indeterminazione di densità e della determinazione degli accennati elementi meccanici del corpo è stato apportato recentemente dal chr̃mo professore Pizzetti in una Memoria pubblicata nel vol. XVII degli Annali di Matematica [1].

Qui mi propongo di far vedere quale è il grado di indeterminazione della densità del corpo, corrispondente ad una assegnata azione esterna del corpo stesso, e come, servendosi della 2ª funzione di Green, possa determinarsi la più generale funzione potenziale di esso corpo; e di trovare ancora il più generale integrale definito, contenente la densità incognita, che risulta pienamente determinato dalla data azione esterna. Le medesime quistioni

[1] *Intorno alle possibili distribuzioni della massa nell'interno della terra.*