ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVIII.

1911

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XX.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1911

e coinciderà colla (1'). Inoltre essa sarà una *funzione meromorfa di* z la cui espressione verrà ottenuta come rapporto di due funzioni olomorfe di z.

6. Dalla (II') segue:

$$\int_\sigma \frac{\partial V(t)}{\partial n} d\sigma + \int_0^1 d\tau \int_\sigma \sum \frac{\partial V(\tau)}{\partial x_i} f_i(\tau, t) \cos n x_i \, d\sigma =$$

$$= -2q(2q-2) \frac{(2\pi)^q}{2 . 4 \dots 2q} F(t),$$

supponendo che il polo $(a_1, a_2, \dots a_{2q})$ sia interno all'iperspazio limitato dal contorno σ. Questa formula vale prendendo per V l'espressione meromorfa che si ricava dalla equazione integrale (2), comunque grande sia $|z|$, esclusi i valori di z che annullano il determinante della equazione integrale.

Prendendo nella (III) $v = V$ ed escludendo il polo mediante uno spazio sferico che si fa tendere a zero, si trova al limite

$$K_\sigma([u, V]) = 2q(2q-2) \frac{(2\pi)^q}{2 . 4 \dots 2q} \int_0^1 F(t)\, u_0(t)\, dt,$$

ove $u_0(t)$ denota il valore di $u(x_1, \dots x_{2q}|t)$ al polo. Da questa formula si ricava subito $u_0(t)$, essendo $F(t)$ una funzione arbitraria.

Matematica. — *Sulla funzione potenziale di spazio corrispondente ad una assegnata azione esterna.* Nota del Corrispondente G. Lauricella.

È noto che, data l'azione esterna di un corpo (in particolare della terra), si possono far corrispondere ad essa infiniti modi differenti di variazioni della densità del corpo, ed è noto ancora che sono però pienamente determinati alcuni elementi meccanici relativi al corpo stesso dipendenti dalla densità. Un notevole contributo allo studio della anzidetta indeterminazione di densità e della determinazione degli accennati elementi meccanici del corpo è stato apportato recentemente dal chmo professore Pizzetti in una Memoria pubblicata nel vol. XVII degli Annali di Matematica [1].

Qui mi propongo di far vedere quale è il grado di indeterminazione della densità del corpo, corrispondente ad una assegnata azione esterna del corpo stesso, e come, servendosi della 2ª funzione di Green, possa determinarsi la più generale funzione potenziale di esso corpo; e di trovare ancora il più generale integrale definito, contenente la densità incognita, che risulta pienamente determinato dalla data azione esterna. Le medesime quistioni

[1] *Intorno alle possibili distribuzioni della massa nell'interno della terra.*

risolvo nell' ipotesi (ammissibile nel caso della terra) che, oltre all'azione esterna del corpo, siano dati alla sua superficie i valori della densità e della sua derivata normale.

Questi risultati e l'uso della 2ª funzione di Green, e in generale della funzione di Green di ordine n, per la sfera, per l'ellissoide di rotazione, ecc., potranno forse essere utili in uno studio dettagliato della funzione potenziale della terra.

Caso in cui è nota la sola azione esterna.

1. Sia S una superficie chiusa, avente in ogni suo punto un piano tangente determinato. Si indichi con τ lo spazio finito limitato da S, con τ' quello infinito pure limitato da S; e si indichi con n la normale nei punti di S, e si prenda per direzione positiva su questa normale quella che entra nel campo finito τ. Riferiamo i punti dello spazio a tre assi cartesiani ortogonali x, y, z; e indichiamo con $\varrho(x, y, z)$ una funzione dei punti di τ, per la quale l'espressione $\Delta^2\varrho$ sia finita ed atta all'integrazione nel campo τ. Indichiamo con (ξ, η, ζ) un punto generico di τ, con (x, y, z) un punto qualsiasi dello spazio; e poniamo:

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2},$$

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{V}(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi}\int_\tau \frac{\varrho(\xi, \eta, \zeta)}{r}\, d\tau .$$

È noto che la funzione $\mathrm{V}(x, y, z)$ è finita e continua in tutto lo spazio insieme alle sue derivate prime, e che si ha:

$$\begin{array}{ll} (\text{nei punti di } \tau) & \Delta^2\mathrm{V} = \varrho(x, y, z), \\ (\quad\text{»}\qquad \tau') & \Delta^2\mathrm{V} = 0. \end{array}$$

Supponendo poi che la superficie S sia di quelle per le quali è risoluto il problema dell'integrazione dell'equazione doppia di Laplace [1], ed indicando con $\mathrm{G}_2(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$ la seconda funzione di Green corrispondente, si avrà [2]:

$$\text{(2)} \qquad \mathrm{V}(x, y, z) = -\int_\tau \mathrm{G}_2 . \Delta^2\varrho\, d\tau + \int_{\mathrm{S}} \left(\frac{d\Delta^2 \mathrm{G}_2}{dn} \mathrm{V} - \frac{d\mathrm{V}}{dn} \Delta^2 \mathrm{G}_2 \right) d\mathrm{S}.$$

2. Dati ad arbitrio nei punti di S i valori di V e di $\frac{d\mathrm{V}}{dn}$, e pure ad arbitrio nei punti di τ i valori di $\Delta^4\mathrm{V}$, esiste, come è noto, una funzione $\mathrm{V}(x, y, z)$ dei punti di τ ed una solamente, la quale nei punti di S prende

(1) Lauricella, *Sull' integrazione dell'equazione* $\Delta^4\mathrm{V} = 0$. Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, vol. XVI, 2° semestre.

(2) Boggio, *Sulle funzioni di Green d'ordine m.* Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, tom. XX, anno 1905,

i valori dati, e di cui la derivata normale nei punti di S coincide con i valori di $\frac{dV}{dn}$, il Δ^4 nei punti di τ coincide con i valori dati di $\Delta^4 V$. Essa funzione può esprimersi mediante la formola:

$$(2)' \qquad V(x, y, z) = -\int_\tau G_2 \,.\, \Delta^4 V \, d\tau + \int_S \left(\frac{d\Delta^2 G_2}{dn} \cdot V - \frac{dV}{dn} \cdot \Delta^2 G \right) dS \, ;$$

ed ancora mediante l'altra:

$$(3) \qquad V(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \int_\tau \frac{\Delta^2 V}{r} \, d\tau + \frac{1}{4\pi} \int_S \left(V \frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{dV}{dn} \frac{1}{r} \right) dS \, .$$

Se i valori di V e di $\frac{dV}{dn}$ nei punti di S sono rispettivamente i valori nei punti di S di una funzione armonica nel campo τ' e quelli della sua derivata normale, si ha, come è noto, nei punti (x, y, z) di τ:

$$(4) \qquad 0 = \int_S \left(V \frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{dV}{dn} \frac{1}{r} \right) dS \, ;$$

per cui risulterà:

$$(5) \qquad V(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \int_\tau \frac{\Delta^2 V}{r} \, d\tau \, .$$

Questa formola ci dice che, *se i valori di* V *e di* $\frac{dV}{dn}$ *nei punti di* S *sono rispettivamente i valori nei punti di* S *di una funzione armonica nel campo* τ' *e quelli della sua derivata normale, la* V, *data dalla formola* (2)′, *si può sempre esprimere mediante una funzione potenziale di massa distribuita nel campo* τ, *qualunque siano i valori assegnati di* $\Delta^4 V$ *nei punti di* τ.

Ed allora, poichè, in virtù della (2), la funzione potenziale di una qualsiasi distribuzione fatta nel campo τ può sempre mettersi sotto la forma (2)′, se segue, tenendo conto dell' uguaglianza

$$(6) \qquad \Delta^4 V = \Delta^2 \varrho \, ,$$

che *la funzione potenziale della più generale distribuzione che può immaginarsi fatta nel campo* τ, *corrispondentemente ad una assegnata azione esterna, è data dalla formola* (2) *con* $\Delta^2\varrho$ *funzione arbitraria*; e così si può dire che, *prestabilita l'azione esterna di una massa distribuita nel campo* τ, *ciò che rimane di arbitrario circa alla densità* $\varrho(x, y, z)$ *è il suo* Δ^2.

Osserviamo ancora che se si suppone nulla l'azione esterna, dovrà aversi nei punti di S: $V = 0$, $\frac{dV}{dn} = 0$; e quindi in virtù delle (2)', (6) si ha che *la funzione*

$$V(x, y, z) = -\int_\tau G_2 \,.\, \Delta^2\varrho \, d\tau ,$$

con $\Delta^2\varrho$ funzione arbitraria, rappresenta la funzione potenziale della più generale distribuzione fatta nel campo τ ad azione esterna nulla.

3. I valori di $\frac{dV}{dn}$ sono determinati dai valori della funzione armonica V nei punti di S; sicchè deve essere possibile eliminare dalla formola (2) il termine contenente $\frac{dV}{dn}$. A tal fine si tenga fisso il punto (x, y, z) di τ e si consideri una funzione $\Gamma(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$ armonica nei punti (ξ, η, ζ) del campo τ' e tale che si abbia:

$$\text{(nei punti di S)} \qquad \Gamma = \Delta^2 G .$$

In forza del lemma di Green, risulterà dalla (2):

$$V(x, y, z) = -\int_\tau G_2 \,.\, \Delta^2\varrho \,.\, d\tau + \int_S \frac{d(\Delta^2 G - \Gamma)}{dn} V dS .$$

4. Sia $U(x, y, z)$ una funzione armonica qualsiasi del campo τ, e $V(x, y, z)$ la solita funzione potenziale di una distribuzione fatta in τ. Il lemma di Green ci dà:

$$0 = \int_\tau U \Delta^2 V d\tau + \int_S \left(U \frac{dV}{dn} - V \frac{dU}{dn}\right) dS ;$$

e quindi:

$$\int_\tau \varrho U \,.\, d\tau = \int_S \left(V \frac{dU}{dn} - U \frac{dV}{dn}\right) dS . \tag{7}$$

Questa formola ci dice che *l'integrale al primo membro, nel quale $U(x, y, z)$ è funzione armonica qualsiasi del campo τ, dipende solo dall'azione esterna della massa distribuita in τ.*

Di qui risultano subito come casi particolari i seguenti risultati ben noti: *data l'azione esterna di un corpo τ,*

α) è determinata la massa totale del corpo stesso: infatti basta fare $U = 1$ nella (7);

β) è determinato il centro di massa di esso corpo: infatti basta fare successivamente $U = x, = y, = z$ nella (7);

γ) sono determinati gli assi principali di inerzia: infatti basta porre successivamente $U = xy, = yz, = zx$ nella (7);

δ) sono determinate le differenze fra i momenti principali d'inerzia: infatti basta fare successivamente $U = x^2 - y^2, = y^2 - z^2, = z^2 - x^2$ nella (7).

È quasi superfluo osservare che, analogamente a quanto si è fatto al § 3, si può eliminare dalla formola (7) il termine contenente $\frac{dV}{dn}$.

5. Vogliamo dimostrare che la proprietà generale, contenuta nella formola (7), è caratteristica per le funzioni potenziali di spazio; ossia che, *data ad arbitrio l'azione esterna di un corpo* τ, cioè, in termini più espliciti, dati ad arbitrio nei punti di S i valori di una funzione V armonica nel campo τ' $\left(\text{e quindi ancora quelli della sua derivata normale } \frac{dV}{dn}\right)$, *se* $\varrho(x, y, z)$ *è una funzione dei punti del campo* τ, *la quale verifica l'equazione integrale* (7) *qualunque si sia la funzione armonica* $U(x, y, z)$, *la funzione potenziale della massa distribuita nel campo* τ *con densità* $\varrho(x, y, z)$ prende nei punti di S i valori arbitrariamente dati di V, ossia *ha un'azione esterna identica alla data.*

Infatti si ponga:

$$V_1(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi}\int_\tau \frac{\varrho(x, y, z)}{r}\, d\tau .$$

Dal lemma di Green e dal teorema di Poisson risulta, qualunque si sia la funzione armonica $U(x, y, z)$,

$$\int_\tau \varrho U d\tau = \int_S \left(V_1 \frac{dU}{dn} - U\frac{dV_1}{dn}\right) dS ;$$

e quindi, posto:

$$V_2(x, y, z) = V(x, y, z) - V_1(x, y, z),$$

si avrà in virtù della (7):

$$0 = \int_S \left(V_2 \frac{dU}{dn} - U\frac{dV_2}{dn}\right) dS, \tag{8}$$

qualunque si sia la funzione armonica U. Indicando con r_1 il vettore che parte da un punto p_1 qualsiasi dell'interno di τ' e va ai punti variabili di τ, si può fare nella (8): $U = \frac{1}{r_1}$, e così si avrà, qualunque sia il punto p_1,

$$0 = \int_S \left(V_2 \frac{d\frac{1}{r_1}}{dn} - \frac{1}{r_1}\frac{dV_2}{dn}\right) dS .$$

Ora la funzione V_2 è, come le funzioni V, V_1, armonica nel campo τ'; sicchè potremo scrivere:

$$V_2(p_1) = -\frac{1}{4\pi}\int_S \left(V_2 \frac{d\frac{1}{r_1}}{dn} - \frac{1}{r_1}\frac{dV_2}{dn} \right) dS ;$$

e quindi si avrà nei punti di τ': $V_2 = 0$, ossia: $V = V_1$, c. d. d.

6. Finora si è studiato l'integrale al primo membro della formola (7), supponendo che la funzione U fosse armonica nel campo τ. Supponiamo ora soltanto che la funzione U sia tale che esista l'espressione $\Delta^2 U$ e che questa sia finita ed atta all'integrazione. Posto:

$$W(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi}\int_\tau \frac{U}{r}\, d\tau ,$$

si avrà:

$$\int_\tau \varrho . U . d\tau = \int_\tau \Delta^2 V . \Delta^2 W d\tau =$$

$$= \int_\tau W . \Delta^4 V d\tau + \int_S \left(W \frac{d\Delta^2 V}{dn} - \Delta^2 V \frac{dW}{dn} \right) dS ,$$

ossia:

$$\int_\tau \varrho . U . d\tau = \int_\tau W . \Delta^2 \varrho . d\tau + \int_S \left(W \frac{d\Delta^2 V}{dn} - \Delta^2 V \frac{dW}{dn} \right) dS ;$$

ed allora, determinata una funzione W_1 tale che

(nei punti di τ) $\Delta^4 W_1 = 0$ (nei punti di S) $W_1 = W, \dfrac{dW_1}{dn} = \dfrac{dW}{dn}$,

risulterà:

$$0 = \int_\tau W_1 . \Delta^4 V d\tau +$$

$$+ \int_S \left(W_1 \frac{d\Delta^2 V}{dn} - \Delta^2 V \frac{dW_1}{dn} + \Delta^2 W_1 \frac{dV}{dn} - V \frac{d\Delta^2 W_1}{dn} \right) dS ;$$

e quindi:

$$(9) \quad \int_\tau \varrho U d\tau = \int_\tau (W - W_1) . \Delta^2 \varrho . d\tau + \int_S \left(V \frac{d\Delta^2 W_1}{dn} - \Delta^2 W_1 \frac{dV}{dn} \right) dS .$$

Questa formola ci dice che, *data l'azione esterna della massa occupante lo spazio* τ, *l'integrale al primo membro è determinato a meno dell'integrale*

$$(10) \quad \int_\tau (W - W_1) . \Delta^2 \varrho . d\tau .$$

Affinchè l'integrale (10) abbia un valore indipendente da $\Delta^2\varrho$, è necessario e sufficiente che sia nei punti di τ: $W = W_1$; e quindi che si abbia:

$$\text{(nei punti di } \tau) \qquad 0 = \Delta^4 W = \Delta^2 U .$$

Questo risultato e quello generale del § 4 ci dànno: *condizione necessaria e sufficiente affinchè l'integrale*

$$(7)' \qquad \int_\tau \varrho U d\tau$$

sia invariante rispetto a $\Delta^2\varrho$, *è che la funzione* U *sia armonica.*

CASO IN CUI, OLTRE ALL'AZIONE ESTERNA, SONO DATI IN SUPERFICIE I VALORI DELLA DENSITÀ E QUELLI DELLA SUA DERIVATA NORMALE.

7. Indicando con $G_4(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$ (¹) la funzione di Green del 4° ordine, si può scrivere, come è noto, per una qualsiasi funzione $V(x, y, z)$ finita e continua nel campo τ insieme alle sue derivate dei primi *otto* ordini (²):

$$V(x, y, z) = -\int_\tau G_4 . \Delta^8 V . d\tau +$$
$$+ \int_S \left(\frac{d\Delta^6 G_4}{dn} V - \Delta^6 G_4 \frac{dV}{dn} + \frac{d\Delta^4 G_4}{dn} \Delta^2 V - \Delta^4 G_4 \frac{d\Delta^2 V}{dn} \right) dS .$$

Questa nel caso in cui $V(x, y, z)$ sia la funzione potenziale (1) ci dà:

$$(11) \qquad V(x, y, z) = -\int_\tau G_4 . \Delta^6 \varrho \, d\tau +$$
$$+ \int_S \left(\frac{d\Delta^6 G_4}{dn} V - \Delta^6 G_4 \frac{dV}{dn} + \frac{d\Delta^4 G_4}{dn} \varrho - \Delta^4 G_4 \frac{d\varrho}{dn} \right) dS .$$

Di qui risulta che, *data ad arbitrio l'azione esterna di una distribuzione fatta in* τ *e dati pure ad arbitrio i valori della densità* ϱ *e della sua derivata normale* $\frac{d\varrho}{dn}$ *nei punti della superficie* S, *la funzione* $V(x,y,z)$, *determinata dalla formola* (11), *è la funzione potenziale di una distribuzione in* τ, *della quale l'azione esterna, la densità nei punti di* S *e la*

(¹) Essendo stato dimostrato il teorema di esistenza per le funzioni poliarmoniche in condizioni molto generali, sia riguardo alla superficie contorno, sia ancora riguardo ai valori al contorno [v. Lauricella, *Sull'equazione* $\Delta^{2i} V = 0$ *e su alcune estensioni delle equazioni dell'equilibrio*, ecc. (Atti del IV Congresso internazionale dei Matematici, vol. III, pag. 33)], ne risulta dimostrata l'esistenza in generale della funzione di Green di ordine qualsiasi.

(²) Boggio, loc. cit.

derivata normale di questa densità coincidono rispettivamente con quelle date, qualunque siano i valori che si assegnano per l'espressione $\Delta^6 \varrho$.

Infatti basterà osservare, come al § 2, che i valori di V e $\frac{dV}{dn}$ devono sempre soddisfare alla equazione (4), e che perciò, in virtù della (3), si ha la (5).

Adunque nel caso preso in considerazione tutto ciò che rimane di arbitrario circa alla densità $\varrho(x, y, z)$ è l'espressione $\Delta^6 \varrho$.

8. Passiamo ora ad esprimere l'integrale studiato al § 6 mediante i nuovi elementi noti. Supposto che la funzione $U(x, y, z)$ sia tale che esista l'espressione $\Delta^2 U$, si ponga:

$$W(x, y, z) = -\frac{1}{4!\,4\pi}\int_\tau r^3\, U\, d\tau .$$

Si avrà:

$$\text{(nei punti di } \tau) \qquad \Delta^6 W = U ;$$

e quindi:

$$(12) \quad \int_\tau \varrho U\, d\tau = \int_\tau \Delta^2 V . \Delta^6 W\, d\tau = \int_\tau W . \Delta^8 V\, d\tau - \\ -\int_S \left(\Delta^2 V \frac{d\Delta^4 W}{dn} - \frac{d\Delta^2 V}{dn} \Delta^4 W + \right. \\ \left. + \Delta^4 V \frac{d\Delta^2 W}{dn} - \frac{d\Delta^4 V}{dn} \Delta^2 W + \Delta^6 V \frac{dW}{dn} - \frac{d\Delta^6 V}{dn} W \right) dS .$$

Ora si determini una funzione $W_1(x, y, z)$ dei punti del campo τ tale che sia:

$$\text{(nei punti di } \tau) \quad \Delta^8 W_1 = 0 ,$$

$$\text{(nei punti di S)} \quad W_1 = W , \frac{dW_1}{dn} = \frac{dW}{dn} , \Delta^2 W_1 = \Delta^2 W , \frac{d\Delta^2 W_1}{dn} = \frac{d\Delta^2 W}{dn} .$$

Risulterà:

$$0 = \int_\tau W_1 . \Delta^8 V\, d\tau - \int_S \left(V \frac{d\Delta^6 W_1}{dn} - \frac{dV}{dn} \Delta^6 W_1 + \right. \\ + \Delta^2 V \frac{d\Delta^4 W_1}{dn} - \frac{d\Delta^2 V}{dn} \Delta^4 W_1 + \Delta^4 V \frac{d\Delta^2 W_1}{dn} - \frac{d\Delta^4 V}{dn} \Delta^2 W_1 + \\ \left. + \Delta^6 V \frac{dW_1}{dn} - \frac{d\Delta^6 V}{dn} W_1 \right) dS ;$$

e quindi, sottraendo questa equazione membro a membro dalla (12), avremo:

$$\int_\tau \varrho \mathrm{U}\, d\tau = \int_\tau (\mathrm{W}-\mathrm{W}_1)\, \Delta^8 \mathrm{V} d\tau + \int_{\mathrm{S}} \Big\{ \mathrm{V} \frac{d\Delta^6 \mathrm{W}_1}{dn} - \frac{d\mathrm{V}}{dn} \Delta^6 \mathrm{W}_1 + \\ + \Delta^2 \mathrm{V} \frac{d\Delta^4 (\mathrm{W}_1 - \mathrm{W})}{dn} - \frac{d\Delta^2 \mathrm{V}}{dn} \Delta^4 (\mathrm{W}_1 - \mathrm{W}) \Big\} d\mathrm{S}$$

ossia:

$$(13) \quad \int_\tau \varrho \mathrm{U} d\tau = \int_\tau (\mathrm{W}-\mathrm{W}_1)\, \Delta^6 \varrho \, d\tau + \int_{\mathrm{S}} \Big\{ \mathrm{V} \frac{d\Delta^6 \mathrm{W}_1}{dn} - \frac{d\mathrm{V}}{dn} \Delta^6 \mathrm{W}_1 + \\ + \varrho \frac{d\Delta^4 (\mathrm{W}_1 - \mathrm{W})}{dn} - \frac{d\varrho}{dn} \Delta^4 (\mathrm{W}_1 - \mathrm{W}) \Big\} d\mathrm{S} .$$

Adunque *tutto ciò che rimane di indeterminato sul valore dell' integrale al primo membro, allorquando è data l'azione esterna del corpo* τ *e sono dati ancora i valori di* ϱ *e di* $\frac{d\varrho}{dn}$ *nei punti di* S, *è l'integrale contenente l'espressione* $\Delta^6 \varrho$.

9. Affinchè l' integrale contenente l'espressione $\Delta^6 \varrho$, che apparisce nella formola (13), sia indipendente da $\Delta^6 \varrho$, è necessario e sufficiente che nei punti di τ sia: $\mathrm{W}_1 = \mathrm{W}$; e quindi che si abbia:

$$0 = \Delta^8 \mathrm{W} = \Delta^2 \mathrm{U},$$

ossia, come al § 6, che la funzione U sia armonica.

In questo caso la formola (13) si ridurrà alla (7).

Adunque si ha, come al § 6, che *condizione necessaria e sufficiente affinchè l'integrale* (7)' *sia invariante rispetto a* $\Delta^6 \varrho$ *è che la* U *sia funzione armonica.*

È utile osservare che, nota l'azione esterna di un corpo τ, l' introduzione di certi nuovi elementi noti in superficie, come ad es. i valori di $\varrho = \Delta^2 \mathrm{V}$ e di $\frac{d\varrho}{dn} = \frac{d\Delta^2 \mathrm{V}}{dn}$ nei punti di S, non allarga il campo degli invarianti della forma (7)' rispetto a ciò che rimane di arbitrario (rispetto a $\Delta^6 \varrho$ nel caso in considerazione) relativamente alla densità.