ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVIII.

1911

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XX.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1911

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Comunicazioni pervenute all'Accademia sino al 1° ottobre 1911.

Meccanica. — *Sulle deformazioni finite dei solidi elastici isotropi*. Nota III del Corrispondente E. ALMANSI.

1. Se un solido elastico isotropo è deformato sotto l'azione di forze esterne, in un suo punto qualunque le tre tensioni principali sono espresse in funzione dei tre allungamenti principali a_1, a_2, a_3 dalle formule

$$\tau_1 = \frac{1}{(1+a_2)(1+a_3)} \frac{\partial \varphi}{\partial a_1}, \text{ ecc.}, \tag{1}$$

ove φ rappresenta il potenziale unitario di elasticità.

Le componenti speciali di tensione sono poi date dalle formule

$$\begin{cases} \tau_{xx} = \alpha_1^2 \tau_1 + \alpha_2^2 \tau_2 + \alpha_3^2 \tau_3, \ldots \\ \tau_{yz} = \beta_1 \gamma_1 \tau_1 + \beta_2 \gamma_2 \tau_2 + \beta_3 \gamma_3 \tau_3, \ldots ; \end{cases} \tag{2}$$

α_1, β_1, γ_1, ecc. essendo i coseni delle direzioni principali rispetto agli assi coordinati.

Noi vogliamo trasformare le equazioni precedenti in modo che data la deformazione del solido, e supponendo nota la funzione φ, si possano calcolare le tensioni senza ricorrere alla determinazione delle direzioni principali.

Più in generale, detti $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ ed $\omega'_1, \omega'_2, \omega'_3$ i coseni di due direzioni r, r', noi prenderemo in esame la quantità

$$\tau_{rr'} = \omega_1\omega'_1\tau_1 + \omega_2\omega'_2\tau_2 + \omega_3\omega'_3\tau_3, \tag{3}$$

di cui le $\tau_{xx}, \dots, \tau_{yz}, \dots$ non sono che valori speciali [1].

2. Consideriamo perciò la φ come funzione degli allungamenti $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, che sono legati agli a_1, a_2, a_3 dalle formule (Nota I, § 3);

$$(1+a_1)^2(1-2\varepsilon_1) = 1, \text{ ecc.} \tag{4}$$

Sarà

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a_1} = \frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_1}\frac{d\varepsilon_1}{da_1}. \tag{5}$$

Ma dalla (4) si ricava

$$\frac{d\varepsilon_1}{da_1} = \frac{1-2\varepsilon_1}{1+a_1};$$

onde sostituendo nella (5), poi nella (1), e ricordando che

$$(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3) = 1+\theta, \tag{6}$$

avremo:

$$\tau_1 = \frac{1-2\varepsilon_1}{1+\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_1}, \text{ ecc.} \tag{7}$$

La φ deve essere funzione degl'invarianti fondamentali:

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \\ \eta &= \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2, \\ \zeta &= \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Ora osserviamo che dalle formule (6) e (4) si ha:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^2 &= (1-2\varepsilon_1)(1-2\varepsilon_2)(1-2\varepsilon_3) = \\ &= 1 - 2(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3) + 4(\varepsilon_2\varepsilon_3+\varepsilon_3\varepsilon_1+\varepsilon_1\varepsilon_2) - 8\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3;\end{aligned} \tag{9}$$

ovvero:

$$\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^2 = 1 - 2\xi + 4\eta - 8\zeta. \tag{10}$$

[1] Essa rappresenta, come si può facilmente riconoscere facendo uso delle stesse formule (2), la proiezione sulla direzione r' della tensione $\overline{\tau}_r$ che agisce sull'elemento normale alla direzione r; od anche la proiezione sulla r della tensione $\overline{\tau}_{r'}$.

Poniamo ancora:

$$\varrho = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2,$$

ossia:

$$(11) \qquad \varrho = \xi^2 - 2\eta.$$

Le formule (10) e (11) permettono di esprimere η e ζ in funzione di ξ, θ e ϱ. Per conseguenza la φ, che è funzione di ξ, η, ζ, potremo anche considerarla funzione di ξ, θ e ϱ.

Introduciamo tre nuove variabili l, m, n, ponendo:

$$(12) \qquad \left\{\begin{aligned} l &= \log(1+\theta) \\ m &= \frac{1}{2}\{\log(1+\theta) - \xi\} \\ n &= \frac{1}{4}\{\log(1+\theta) - \xi - \varrho\}. \end{aligned}\right.$$

Queste equazioni si possono risolvere rispetto a ξ, θ e ϱ, che risulteranno espresse mediante le variabili l, m, n: potremo quindi considerare la φ come funzione delle stesse variabili. Avremo perciò:

$$(13) \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_1} = \frac{\partial\varphi}{\partial l}\frac{\partial l}{\partial\varepsilon_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial m}\frac{\partial m}{\partial\varepsilon_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial n}\frac{\partial n}{\partial\varepsilon_1}.$$

Ma dalla 1ª delle (12) si ha:

$$\frac{\partial l}{\partial\varepsilon_1} = \frac{1}{1+\theta}\frac{\partial\theta}{\partial\varepsilon_1};$$

e dalla (9):

$$\frac{\partial\theta}{\partial\varepsilon_1} = \frac{1+\theta}{1-2\varepsilon_1};$$

quindi

$$\frac{\partial l}{\partial\varepsilon_1} = \frac{1}{1-2\varepsilon_1}.$$

Dalla 2ª e dalla 3ª delle (12) si ha poi, osservando che $\frac{\partial}{\partial\varepsilon_1}\log(1+\theta) = \frac{\partial l}{\partial\varepsilon_1} = \frac{1}{1-2\varepsilon_1}$, $\frac{\partial\xi}{\partial\varepsilon_1} = 1$, $\frac{\partial\varrho}{\partial\varepsilon_1} = 2\varepsilon_1$:

$$\frac{\partial m}{\partial\varepsilon_1} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1-2\varepsilon_1} - 1\right\} = \frac{\varepsilon_1}{1-2\varepsilon_1},$$

$$\frac{\partial n}{\partial\varepsilon_1} = \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{1-2\varepsilon_1} - 1 - 2\varepsilon_1\right\} = \frac{\varepsilon_1^2}{1-2\varepsilon_1}.$$

Onde la formula (13) diventerà:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_1} = \frac{1}{1 - 2\varepsilon_1}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial l} + \frac{\partial \varphi}{\partial m}\varepsilon_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial n}\varepsilon_1^2\right).$$

Sostituendo ora nella (7) avremo:

$$\tau_1 = \frac{1}{1+\theta}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial l} + \frac{\partial \varphi}{\partial m}\varepsilon_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial n}\varepsilon_1^2\right);$$

o più semplicemente:

$$\tau_1 = \frac{1}{1+\theta}(\mathrm{L} + \mathrm{M}\varepsilon_1 + \mathrm{N}\varepsilon_1^2),$$

avendo posto:

$$\mathrm{L} = \frac{\partial \varphi}{\partial l}, \quad \mathrm{M} = \frac{\partial \varphi}{\partial m}, \quad \mathrm{N} = \frac{\partial \varphi}{\partial n}.$$

Analogamente sarà:

$$\tau_2 = \frac{1}{1+\theta}(\mathrm{L} + \mathrm{M}\varepsilon_2 + \mathrm{N}\varepsilon_2^2), \quad \tau_3 = \frac{1}{1+\theta}(\mathrm{L} + \mathrm{M}\varepsilon_3 + \mathrm{N}\varepsilon_3^2).$$

Se queste espressioni di τ_1, τ_2, τ_3 le sostituiamo nella formula (3) otterremo:

$$\tau_{rr'} = \frac{1}{1+\theta}\{\mathrm{L}(\omega_1\omega_1' + \omega_2\omega_2' + \omega_3\omega_3') + \mathrm{M}(\omega_1\omega_1'\varepsilon_1 + \omega_2\omega_2'\varepsilon_2 + \omega_3\omega_3'\varepsilon_3) + \\ + \mathrm{N}(\omega_1\omega_1'\varepsilon_1^2 + \omega_2\omega_2'\varepsilon_2^2 + \omega_3\omega_3'\varepsilon_3^2)\}.$$

Ora, il coefficiente di L non è altro che il coseno dell'angolo formato dalle due direzioni r, r'; coseno che denoteremo con $\alpha_{rr'}$. Il coefficiente di M è $\varepsilon_{rr'}$ (Nota I, § 4). Poniamo inoltre:

$$(14) \qquad k_{rr'} = \omega_1\omega_1'\varepsilon_1^2 + \omega_2\omega_2'\varepsilon_2^2 + \omega_3\omega_3'\varepsilon_3^2.$$

Sarà:

$$(15) \qquad \tau_{rr'} = \frac{1}{1+\theta}(\mathrm{L}\alpha_{rr'} + \mathrm{M}\varepsilon_{rr'} + \mathrm{N}k_{rr'}).$$

Conoscendo la funzione φ delle variabili ξ, η, ζ, o ξ, θ, ϱ, o l, m, n, conosceremo pure le funzioni L, M, N delle stesse variabili. Le tre variabili ξ, η, ζ sono espresse dalla formula (8), in funzione degli allungamenti principali $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$; ma esse si sanno anche esprimere in funzione delle quantità $\varepsilon_{xx}, \ldots, \varepsilon_{yz}, \ldots$, relative ad una terna qualunque di assi. E varranno (come risulta da quanto è detto nel § 4 della Nota I) formule perfettamente analoghe a quelle che si hanno nella teoria ordinaria. Sarà cioè

$$\xi = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}, \text{ ecc.}$$

La dilatazione θ si può avere, in funzione di ξ, η, ζ, dalla formula (10) [1]. La quantità $\varepsilon_{rr'}$ è data dalla formula (4) della Nota I. Resta solo a vedersi come si possa calcolare, senza ricorrere alle direzioni principali, la quantità $k_{rr'}$.

3. Diciamo $\varepsilon_{rx}, \varepsilon_{ry}, \varepsilon_{rz}$ ciò che diventa $\varepsilon_{rr'}$ quando la direzione r' coincida con quella dell'asse delle x, o delle y, o delle z. Dalla formula (4) della Nota I avremo:

$$\varepsilon_{rx} = \alpha\varepsilon_{xx} + \beta\varepsilon_{xy} + \gamma\varepsilon_{xz}, \text{ ecc.};$$

e la formula stessa potrà scriversi:

$$\varepsilon_{rr'} = \alpha'\varepsilon_{rx} + \beta'\varepsilon_{ry} + \gamma'\varepsilon_{rz}.$$

Denotiamo con $\overline{\mathrm{V}}_r$ il vettore le cui proiezioni sugli assi coordinati sono $\varepsilon_{rx}, \varepsilon_{ry}, \varepsilon_{rz}$. Ed osserviamo che per un punto P del solido deformato, e per una direzione r, esso è indipendente dalla scelta degli assi; infatti la sua proiezioue sopra una direzione qualunque r' è $\alpha'\varepsilon_{rx} + \beta'\varepsilon_{ry} + \gamma'\varepsilon_{rz}$, ossia $\varepsilon_{rr'}$: quantità che non dipende dagli assi, come apparisce dalla formula (3) della Nota I. Indichiamo poi con $\pi_{rr'}$ il prodotto geometrico dei due vettori $\overline{\mathrm{V}}_r, \overline{\mathrm{V}}_{r'}$ relativi ad un punto P e a due direzioni r, r'; poniamo cioè:

$$\pi_{rr'} = \varepsilon_{rx}\,\varepsilon_{r'x} + \varepsilon_{ry}\,\varepsilon_{r'y} + \varepsilon_{rz}\,\varepsilon_{r'z}. \tag{16}$$

Un'altra espressione di $\pi_{rr'}$ potremo formarla mediante le proiezioni $\varepsilon_{rr_1}, \varepsilon_{r'r_1}$, ecc. degli stessi vettori $\overline{\mathrm{V}}_r, \overline{\mathrm{V}}_{r'}$ sulle tre direzioni principali, anzichè sugli assi coordinati. E sarà:

$$\pi_{rr'} = \varepsilon_{rr_1}\,\varepsilon_{r'r_1} + \varepsilon_{rr_2}\,\varepsilon_{r'r_2} + \varepsilon_{rr_3}\,\varepsilon_{r'r_3}.$$

Il valore di ε_{rr_1} si può ricavare dalla formula generale (7) della Nota I, supponendo per un momento, che la direzione r' coincida colla r_1. Dovremo fare $\omega_1' = 1$, $\omega_2' = \omega_3' = 0$; e troveremo $\varepsilon_{rr_1} = \omega_1\varepsilon_1$. Analogamente sarà $\varepsilon_{r'r_1} = \omega_1'\varepsilon_1$, $\varepsilon_{rr_2} = \omega_2\varepsilon_2$, ecc. Onde avremo:

$$\pi_{rr'} = \omega_1\omega_1'\varepsilon_1^2 + \omega_2\omega_2'\varepsilon_2^2 + \omega_3\omega_3'\varepsilon_3^2.$$

Dal confronto di questa formula colla (14) vediamo che $k_{rr'}$ non è altro che $\pi_{rr'}$. Quindi la (15) potrà scriversi:

$$\tau_{rr'} = \frac{1}{1+\theta}\left(\mathrm{L}\alpha_{rr'} + \mathrm{M}\varepsilon_{rr'} + \mathrm{N}\pi_{rr'}\right).$$

[1] Non v'è ambiguità di segno per $\frac{1}{1+\theta}$, quantità essenzialmente positiva.

In particolare, supponendo che l'una e l'altra delle due direzioni r, r' coincida con quella di un asse coordinato, ed osservando che $\alpha_{xx} = 1, \dots,$ $\alpha_{yz} = 0, \dots,$ avremo:

$$(17)\quad \begin{cases} \tau_{xx} = \dfrac{1}{1+\theta}(\mathrm{L} + \mathrm{M}\varepsilon_{xx} + \mathrm{N}\pi_{xx}), \dots, \\ \tau_{yz} = \dfrac{1}{1+\theta}(\mathrm{M}\varepsilon_{yz} + \mathrm{N}\pi_{yz}), \dots; \end{cases}$$

e dalla formula (16):

$$\pi_{xx} = \varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{xz}^2, \dots,$$

$$\pi_{yz} = \varepsilon_{yx}\,\varepsilon_{zx} + \varepsilon_{yy}\,\varepsilon_{zy} + \varepsilon_{yz}\,\varepsilon_{zz}, \dots$$

Il problema così è risoluto.

Appare evidente l'importanza che hanno, nel calcolo delle tensioni, le quantità $\varepsilon_{rr'}$ (di cui le parti del 1° ordine intervengono già nella teoria ordinaria) e le $\pi_{rr'}$. Quanto ai coefficienti L, M, N, essi hanno, in ogni punto del solido, un valore indipendente dalle direzioni r, r'.

4. Terminerò accennando a qualche caso particolare per ciò che riguarda la natura delle funzioni L, M, N (vale a dire del potenziale φ).

Supponiamo da prima che L, M, N dipendano soltanto dalla dilatazione θ, ossia soltanto dalla variabile $l = \log(1+\theta)$. Per la formula $\dfrac{\partial\varphi}{\partial l} = \mathrm{L}(l)$ dovrà essere:

$$\varphi = \int_0^l \mathrm{L}(l)\, dl + \varphi_0(m, n),$$

ove φ_0 è una funzione arbitraria di m ed n. Ma sostituendo questa espressione di φ nelle altre due formule $\dfrac{\partial\varphi}{\partial m} = \mathrm{M}(l)$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial n} = \mathrm{N}(l)$, avremo:

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial m} = \mathrm{M}(l) \quad , \quad \frac{\partial\varphi_0}{\partial n} = \mathrm{N}(l);$$

ed affinchè queste equazioni, i cui primi membri non contengono l, risultino verificate, è necessario che $\mathrm{M}(l)$ ed $\mathrm{N}(l)$ si riducano a due costanti, che chiamerò A, B. Onde integrando, e determinando la costante arbitraria colla condizione che se la deformazione è nulla ($l = m = n = 0$) il potenziale sia pure nullo, si avrà $\varphi_0 = \mathrm{A}m + \mathrm{B}n$,

$$\varphi = \int_0^l \mathrm{L}(l)\, dl + \mathrm{A}m + \mathrm{B}n.$$

Denotando con $f(\theta)$ la funzione $L(l)$, le formule (17) diventano:

$$\tau_{xx} = \frac{1}{1+\theta} \{ f(\theta) + A\varepsilon_{xx} + B\pi_{xx} \}, \ldots,$$

$$\tau_{yz} = \frac{1}{1+\theta} \{ A\varepsilon_{yz} + B\pi_{yz} \}, \ldots$$

Come caso ancora più particolare, supponiamo $f(\theta) = C\theta$, ove C è un'altra costante. Sarà:

$$\tau_{xx} = \frac{1}{1+\theta} (A\varepsilon_{xx} + B\pi_{xx} + C\theta), \ldots,$$

$$\tau_{yz} = \frac{1}{1+\theta} (A\varepsilon_{yz} + B\pi_{yz}), \ldots$$

Se infine supponiamo $B = 0$, $A \lesseqgtr 0$, ponendo $C = hA$ ($h =$ cost.) otterremo le formule

$$(18) \qquad \left\{ \begin{aligned} \tau_{xx} &= \frac{A}{1+\theta} (\varepsilon_{xx} + h\theta), \ldots, \\ \tau_{yz} &= \frac{A}{1+\theta} \varepsilon_{yz}, \ldots, \end{aligned} \right.$$

che più si avvicinano a quelle della teoria ordinaria.

5. Un altro caso notevole è il seguente: che il potenziale φ dipenda dalle sole variabili l ed m. Sarà $N = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$, quindi:

$$\tau_{xx} = \frac{1}{1+\theta} (L + M\varepsilon_{xx}), \ldots,$$

$$\tau_{yz} = \frac{1}{1+\theta} M\varepsilon_{yz}, \ldots;$$

(formule che comprendono pure le ultime del § precedente). In questo caso, se per es. $\varepsilon_{yz} = 0$, sarà anche $\tau_{yz} = 0$; e poichè due direzioni ortogonali qualunque possiamo assumerle come assi delle y e delle z, sussisterà, come nella teoria ordinaria, il teorema che se lo scorrimento relativo a due direzioni ortogonali è nullo, è anche nulla la tensione tangenziale relativa a quelle due direzioni.

Le variabili l, m dipendono solo da ξ e θ (§ 2): quindi anche il potenziale φ sarà funzione di ξ e θ. Ed avremo:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \frac{\partial \varphi}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial \xi} + \frac{\partial \varphi}{\partial m} \frac{\partial m}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{\partial \varphi}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial \xi} + \frac{\partial \varphi}{\partial m} \frac{\partial m}{\partial \theta}.$$

Ma per le formule (12) $\frac{\partial l}{\partial \xi}=0\,,\ \frac{\partial l}{\partial \theta}=\frac{1}{1+\theta}\,,\ \frac{\partial m}{\partial \xi}=\frac{1}{2}\,,\ \frac{\partial m}{\partial \theta}=\frac{1}{2(1+\theta)}\,.$

Onde, sostituendo L ed M a $\frac{\partial \varphi}{\partial l}$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial m}$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}=-\frac{1}{2}\mathrm{M}\,,\quad \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}=\frac{1}{1+\theta}\left(\mathrm{L}+\frac{1}{2}\mathrm{M}\right);$$

da cui si ricava:

$$\mathrm{L}=\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}+(1+\theta)\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\,,\quad \mathrm{M}=-2\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\,.$$

Se, in particolare,

$$\varphi=\int_0^\xi f(\xi)\,d\xi+\int_0^\theta \frac{1}{1+\theta}g(\theta)\,d\theta\,,$$

sarà

$$\mathrm{L}=f(\xi)+g(\theta)\,,\quad \mathrm{M}=-2f(\xi),$$

ove f e g possono rappresentare funzioni arbitrarie, salvo la condizione, su cui qui non mi fermo, che il potenziale resulti positivo.

Se, finalmente, $f=-\frac{\mathrm{A}}{2}\,,\ g=\frac{\mathrm{A}}{2}(1+2h)\,\theta$, A ed h essendo due costanti, sarà $\mathrm{L}=\mathrm{A}h\theta\,,\ \mathrm{M}=\mathrm{A}$; e si ritrovano le formule (18).

Fisica. — *Su la diffusione del potenziale elettrostatico nell'aria* (¹). Nota del Corrispondente A. Garbasso e di G. Vacca.

1) In una Nota, pubblicata in questi Rendiconti (²), abbiamo richiamato l'attenzione sopra una vecchia esperienza di Bennet e di Volta. L'elettricità *dispersa* per una punta, o con qualunque altro artificio, nell'aria di una stanza, si studiava per mezzo di un elettroscopio munito di fiamma.

Noi facevamo vedere che se la punta e la fiamma sono separate da un intervallo considerevole (10 o 15 metri, per esempio) il massimo del potenziale arriva all'elettroscopio qualche minuto dopo che la macchina ha finito di agire.

Già allora cercavamo di formarci un'idea del processo ammettendo la formazione di particelle elettrizzate, di *ioni*, i quali diffonderebbero nell'aria con una velocità assai grande.

Abbiamo istituito una serie di esperienze, che ci permettono di confermare l'ipotesi della diffusione e rivelano ad un tempo alcuni fatti nuovi.

2) Volendo studiare il fenomeno sotto forma semplice, e atta alle indagini quantitative, è opportuno disporre le cose in guisa da far dipendere il processo da una sola coordinata cartesiana. Bisogna, in altri termini, che le

(¹) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica della R. Università di Genova.

(²) Rend. R. Acc. dei Lincei (5), XX, [2], 1911, pag. 239.