ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVIII.

1911

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XX.

2° SEMESTRE.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1911

Meccanica. — *Sopra le deformazioni finite. Le equazioni del De Saint-Venant.* Nota di UMBERTO CRUDELI, presentata dal Corrispondente ALMANSI.

Siano (rispetto ad una terna cartesiana ortogonale) x_0, y_0, z_0 le coordinate relative allo spazio occupato dal corpo deformabile nel suo stato naturale, ed x, y, z quelle corrispondenti nello stato di deformazione. E siano $u_0(x_0, y_0, z_0)$, $v_0(x_0, y_0, z_0)$, $w_0(x_0, y_0, z_0)$ le componenti di spostamento considerate come funzioni delle x_0, y_0, z_0 ed $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$ le componenti stesse considerate come funzioni delle x, y, z. Se nella forma

$$dx_0^2 + dy_0^2 + dz_0^2 \tag{1}$$

poniamo $x_0 + u_0$, $y_0 + v_0$, $z_0 + w_0$ rispettivamente al posto di x_0, y_0, z_0 si ottiene

$$(1 + 2\varepsilon_{x_0x_0})\, dx_0^2 + \cdots + 4\varepsilon_{x_0y_0}\, dx_0\, dy_0 + \cdots \tag{2}$$

per modo che vengono così poste in luce le caratteristiche della deformazione considerate dal Cauchy

$$\left\{\begin{array}{l}
\varepsilon_{x_0x_0} = \dfrac{\partial u_0}{\partial x_0} + \dfrac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{\partial u_0}{\partial x_0}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial v_0}{\partial x_0}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial w_0}{\partial x_0}\right)^2\right\} \\[2ex]
\varepsilon_{y_0y_0} = \dfrac{\partial v_0}{\partial y_0} + \dfrac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{\partial u_0}{\partial y_0}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial v_0}{\partial y_0}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial w_0}{\partial y_0}\right)^2\right\} \\[2ex]
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\[1ex]
\varepsilon_{x_0y_0} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_0}{\partial x_0} + \dfrac{\partial u_0}{\partial y_0}\right) + \dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{\partial u_0}{\partial x_0}\dfrac{\partial u_0}{\partial y_0} + \dfrac{\partial v_0}{\partial x_0}\dfrac{\partial v_0}{\partial y_0} + \dfrac{\partial w_0}{\partial x_0}\dfrac{\partial w_0}{\partial y_0}\right\} \\[2ex]
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot
\end{array}\right.$$

E se, considerando la forma

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 , \tag{3}$$

poniamo $x - u$, $y - v$, $z - w$ rispettivamente al posto di x, y, z avremo

$$(1 - 2\varepsilon_{xx})\, dx^2 + \cdots - 4\varepsilon_{xy}\, dx\, dy - \cdots \tag{4}$$

dove

$$\left\{\begin{array}{l}
\varepsilon_{xx}=\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right\}\\
\varepsilon_{yy}=\dfrac{\partial v}{\partial y}-\dfrac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right\}\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\varepsilon_{xy}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)-\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial w}{\partial y}\right\}\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}\right.$$

che sono le caratteristiche della deformazione considerate dal prof. Almansi (¹).

Le relazioni del De Saint-Venant consistono, come è noto, in un sistema di equazioni alle derivate parziali. cui è necessario e sufficiente che soddisfino le funzioni atte a rappresentare le caratteristiche di deformazione. La ricerca delle relazioni in discorso per le deformazioni finite fu fatta dal sig. Manville (²) e alle relazioni stesse fu poi data una forma notevolmente elegante dal prof. Marcolongo (³). I metodi seguiti sono tuttavia artificiosi. Anzi non vi è bisogno di escogitare procedimenti *sui generis*, giacchè quelle equazioni possono ottenersi come semplice caso particolare nella teoria delle forme differenziali quadratiche equivalenti. Teoria che permette pure di dare a quelle equazioni una forma semplice ed elegante.

Infatti, intendendo, per fissare le idee, che vengano assegnate le funzioni $\varepsilon_{xx}, \dots, \varepsilon_{xy}, \dots$, *condizione necessaria e sufficiente affinchè esse siano caratteristiche di deformazione è che le funzioni stesse soddisfino alle equazioni che si ottengono eguagliando a zero i simboli Riemanniani relativi alla forma* (4).

La condizione è necessaria, giacchè, qualora esista una deformazione, che ammetta quelle caratteristiche, esisteranno tre funzioni $\varphi_1(x, y, z)$, $\varphi_2(x, y, z)$, $\varphi_3(x, y, z)$ che, sostituite nella (1) al posto rispettivamente di x_0, y_0, z_0, tradurranno la (1) nella (4); in altre parole le forme (1) e (4) saranno allora equivalenti. Ma i simboli Riemanniani relativi alla (1) sono ovunque nulli, giacchè la (1) è una forma a coefficienti costanti; dunque saranno allora ovunque nulli anche i simboli Riemanniani relativi alla (4) (vedasi Bianchi, *Geom. diff.*, vol. I, pag. 72, formula III).

La condizione è sufficiente, giacchè, qualora le $\varepsilon_{xx}, \dots, \varepsilon_{xy}, \dots$, vengano assegnate in modo che i simboli Riemanniani della (4) risultino ovunque nulli, le due forme (1) e (4) saranno entrambe a curvatura nulla. E, poichè due forme differenziali quadratiche aventi la medesima curvatura costante

(¹) Rend. R. Acc. dei Lincei, 1° sem. 1911, pag. 708.

(²) Mémoires de la Société des Sciences Phys. et Nat. de Bordeaux, 1904.

(³) Rend. del Circ. Mat. di Palermo, 1905, tomo XIX.

(nel nostro caso nulla) sono equivalenti (Bianchi, loc. cit., pag. 75) potremo allora (per la definizione di equivalenza) trovare tre funzioni $\varphi_1(x, y, z)$, $\varphi_2(x, y, z)$, $\varphi_3(x, y, z)$ tali che, ponendo $x_0 = \varphi_1(x, y, z)$, $y_0 = \varphi_2(x, y, z)$, $z_0 = \varphi_3(x, y, z)$, la forma (1) si traduca nella (4). E allora, scrivendo $\varphi_1 = x - u$, $\varphi_2 = y - v$, $\varphi_3 = z - w$, potremo intendere, evidentemente, che le u, v, w siano componenti di spostamento in una deformazione, che avrà le assegnate caratteristiche.

Le equazioni del De Saint-Venant si otterranno, dunque, immediatamente, eguagliando a zero i suddetti simboli Riemanniani (i quali nel nostro caso sono in numero di 6 distinti). Avremo, così (in virtù della espressione dei simboli stessi, che viene data a pag. 73 del citato volume del Bianchi) le equazioni cercate

$$\left\{\begin{aligned} (12, 12) &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x\, \partial y} + \\ &\quad + \sum_{l,m} A_{l,m} \left\{ \begin{bmatrix} 1\,2 \\ m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1\,2 \\ l \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1\,1 \\ m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\,2 \\ l \end{bmatrix} \right\} = 0 \\ (12, 13) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y\, \partial z} + \\ &\quad + \sum_{l,m} A_{l,m} \left\{ \begin{bmatrix} 1\,3 \\ m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1\,2 \\ l \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1\,1 \\ m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3\,2 \\ l \end{bmatrix} \right\} = 0 \\ &\text{e le analoghe,} \qquad (l, m = 1, 2, 3) \end{aligned}\right.$$

dove $A_{l,m}$ rappresenta il complemento algebrico di $a_{l,m}$ nel discriminante relativo alla forma (4) e

$$\begin{bmatrix} r\,h \\ m \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{rm}}{\partial x_h} + \frac{\partial a_{hm}}{\partial x_r} - \frac{\partial a_{rh}}{\partial x_m} \right) \qquad (r, h = 1, 2, 3)$$

avendo posto

$$x = x_1, \quad y = y_1, \quad z = z_1$$

$$1 - 2\varepsilon_{xx} = a_{11}, \quad 1 - 2\varepsilon_{yy} = a_{22}, \quad 1 - 2\varepsilon_{zz} = a_{33}$$

$$-2\varepsilon_{xy} = -2\varepsilon_{yx} = a_{12} = a_{21}, \quad -2\varepsilon_{xz} = -2\varepsilon_{zx} = a_{13} = a_{31},$$

$$-2\varepsilon_{yz} = -2\varepsilon_{zy} = a_{23} = a_{32}.$$