ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVIII.

1911

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XX.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1911

Si viene così delineando una importante cagione di sempre rinnovato movimento dei succhi attraverso i tessuti, nei quali le essenze sono generate, o sui quali le essenze arrivano ad agire. Si manifesta una causa di azioni che cagionando anche impercettibili trapelamenti e trasudamenti, attivano le relazioni fra la pianta e l'esterno.

Si chiarisce sempre più il fatto che non è solo la pianta ad adattarsi all'ambiente; ma che con piccole e continue azioni, la pianta può anche modificare gli ambienti, nei quali deve attingere acqua ed alimenti, agire sopra altri organismi, e difendersi da numerosi e multiformi nemici e concorrenti.

Matematica. — *Sopra una classe di varietà algebriche a tre dimensioni con un gruppo* ∞^2 *di trasformazioni birazionali in sè.* Nota di GAETANO SCORZA, presentata dal Corrispondente G. CASTELNUOVO.

Circa un anno fa, in seguito a un consiglio del prof. Castelnuovo e alla lettura delle recenti e importantissime Memorie dei proff. Enriques e Severi, Bagnera e De-Franchis sulle superficie iperellittiche (¹), che hanno fatto compiere progressi essenziali alla teoria delle funzioni abeliane di due variabili, mi proposi lo studio delle varietà a tre dimensioni, che ammettono una rappresentazione parametrica per funzioni meromorfe di tre variabili sei volte periodiche. Ben presto, però, le mie ricerche furono interrotte, nè ancora ho potuto riprenderle con calma.

Ma poichè di una parte di esse si può dare facilmente una esposizione indipendente da tutto il resto, non credo inutile pubblicarne qui i risultati: solo che, per non estendermi troppo e, anche, per non ripetere con lievi mutamenti argomentazioni che già si trovano in una delle Memorie suddette, tralascerò tutte quelle dimostrazioni che, da chiunque la conosca, possono essere facilmente ricostruite.

1. Sia V una varietà algebrica a tre dimensioni che ammette un gruppo algebrico continuo doppiamente infinito di trasformazioni birazionali in sè; e a proposito di questo gruppo, che indicheremo con G, supponiamo:

α) che sia abeliano;

(¹) Enriques e Severi, *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques* (Acta Mathem., tomi 32 e 33); Bagnera e De Franchis, *Le superficie algebriche* ecc. (Memorie della Soc. it. delle Scienze, detta dei XL, ser. 3ª, tom. 15) e *Le nombre ρ de M. Picard* etc. (Rend. del Circ. Mat. di Palermo, tom. 30). Di queste ultime due Memorie, la prima, quando occorrerà citarla, sarà indicata con (A).

β) che non contenga infinite operazioni con ∞^2 punti uniti ciascuna. Allora è facile dimostrare che:

La varietà V *contiene un fascio* (*razionale o non*) *di superficie iperellittiche di rango* 1, *e la sua irregolarità superficiale* q *è non minore di* 2.

Per questo osserviamo in primo luogo che G considerato come varietà ∞^2 delle sue operazioni, è una varietà iperellittica di rango 1; poichè la moltiplicazione di tutte le operazioni di G per una determinata di esse, diciamo T, dà luogo a una *trasformazione* di G in sè stesso, che, al variare di T entro G, descrive un gruppo continuo abeliano a due parametri, assolutamente transitivo ([1]). Segue che G ammette due integrali semplici di prima specie, u e v.

Poi, se chiamiamo X un punto generico di V, e ϱ_x il luogo delle posizioni ove esso è portato dalle varie operazioni di G, è facile accorgersi, per l'ipotesi β), che la dimensione di ϱ_x è precisamente 2 e che X è portato in ogni punto di ϱ_x da una sola operazione di G; quindi ϱ_x è una superficie iperellittica di rango 1.

Ma allora, se fissiamo su V una curva algebrica irriducibile C, che non giaccia sopra nessuna delle ∞^1 superficie ϱ, e sono $O_1, O_2, \dots, O_m$ i punti in cui essa interseca ϱ_x, le m operazioni di G che portano $O_1, O_2, \dots, O_m$ in X sono ben determinate, e le somme, u' e v' ([2]), dei valori degli integrali u e v, che ad esse competono, sono due integrali di Picard di prima specie, della varietà V; quindi, per l'irregolarità superficiale q di V, si avrà appunto la diseguaglianza $q \geq 2$.

2. Se F è una qualunque superficie tracciata su V, u' e v' saranno su F due integrali semplici di prima specie con quattro paia di periodi funzionalmente indipendenti: ma allora, per il teorema di inversione generalizzato, vi è su F soltanto un numero finito di punti in cui u' e v' assumano valori prefissati, e quindi le equazioni

$$u' = h \quad , \quad v' = k$$

rappresentano sulla V, al variare delle costanti h e k, una congruenza (lineare) di curve *algebriche* o irriducibili o spezzate in parti costituenti a loro volta una nuova congruenza lineare.

([1]) Severi, *Sulle superficie algebriche* ecc. (Atti del R. Istit. Veneto, tom. LXVII, 1907-1908).

([2]) Notisi che nessuno degli integrali u' e v' può ridursi a una costante e che, per conseguenza, u' e v' sono linearmente (anzi, funzionalmente) indipendenti. Per convincersene, basta ricordare che la determinazione delle operazioni di G mediante le coppie di valori (incongrue) degli integrali u e v può farsi in modo che, se a due operazioni di G corrispondono le coppie $(u_1 v_1)$ e $(u_2 v_2)$, al loro prodotto corrisponda la coppia $(u_1 + u_2, v_1 + v_2)$.

Dall'osservazione richiamata nella nota a pie' di pagina è facile dedurre che ogni curva di quest'ultima congruenza (quando occorra considerarla) è portata da un'operazione di G, che non la lasci ferma, in un'altra curva della congruenza stessa; dunque codeste curve sono tutte birazionalmente identiche. Poi la loro varietà, potendo riferirsi biunivocamente ai gruppi di un'involuzione situata sopra una superficie iperellittica di rango 1 (cioè sopra una delle superficie ϱ) e possedendo due integrali semplici di prima specie, è essa stessa iperellittica di rango 1; dunque:

La varietà V *contiene una congruenza lineare iperellittica di rango* 1 *di curve irriducibili* C, *che sono tutte birazionalmente identiche.*

Notisi che se n è il numero dei punti comuni a una curva C e a una superficie ϱ, esistono n operazioni di G che mutano in sè (la ϱ, la C e) questo gruppo di punti. Esse costituiscono un sottogruppo di G (d'ordine finito abeliano e transitivo).

3. Adesso supponiamo che le curve C siano ellittiche; allora, come risulterà dai numeri seguenti, è facile procedere a una determinazione completa della varietà V.

Infatti, se si tornano a considerare gli integrali u e v appartenenti a G, e poi, fissata una curva C, si chiama w il suo integrale di prima specie, si trova, con un ragionamento noto [cfr. (A), pp. 290-291], che le coordinate $(xyzt)$ del punto generico di V (supposto, com'è lecito, che V sia immersa in uno spazio a quattro dimensioni) sono funzioni meromorfe sestuplamente periodiche dei parametri u, v, w

$$(1) \qquad x = \varphi_1(uvw) \ , \ y = \varphi_2(uvw) \ , \ z = \varphi_3(uvw) \ , \ t = \varphi_4(uvw) \, ,$$

e che a uno stesso punto $(xyzt)$ di V corrispondono n terne incongrue di valori dei parametri u, v e w, deducibili da una qualunque di esse mediante sostituzioni lineari a coefficienti indipendenti da x, y, z e t.

Ciò val quanto dire che V rappresenta un'involuzione appartenente a una *varietà abeliana* Φ *di rango* 1 ([1]), generata da un gruppo finito, H, di trasformazioni birazionali di Φ in sè stessa. L'ordine r di questo gruppo, ossia il grado di quella involuzione, è poi un divisore di n $(\leq n)$.

Poichè V rappresenta un'involuzione appartenente a una varietà abeliana Φ di rango 1, l'irregolarità superficiale q (≥ 2) di V, non potendo superare quella di Φ, è ≤ 3.

([1]) Crediamo inutile fermarci a dichiarare il senso ovvio di questa denominazione analoga a quella già introdotta per le superficie iperellittiche dai sigg. Enriques e Severi; piuttosto, poichè ciò interessa per quel che si afferma al principio del n. 7, osserveremo che se si scrivessero effettivamente le sostituzioni lineari di cui si parla nel testo, dalla loro forma si dedurrebbe immediatamente che: *l'involuzione su* Φ *rappresentata da* V *è priva di punti uniti.*

Se $q=3$ è facile riconoscere che V è anch'essa una varietà abeliana di rango 1; se $q=2$, a tutte le sostituzioni di H può darsi l'aspetto

$$(2) \qquad u' = u + \delta_1 \quad , \quad v' = v + \delta_2 \quad , \quad w' = \lambda w \, .$$

Anzi, poichè in tal caso H è ciclico, nelle (2) si può immaginare che λ sia radice primitiva r^{ma} dell'unità e che la (1) sia appunto l'operazione generatrice di H [cfr. (A), pag. 265].

Abbiamo pertanto il teorema:

La nostra varietà V, *nell'ipotesi che le* C *siano curve ellittiche, o è una varietà abeliana di rango* 1, *o rappresenta un'involuzione generata sopra una tale varietà da un gruppo finito ciclico di trasformazioni birazionali.*

Nel primo caso l'irregolarità superficiale q di V è uguale a 3; nel secondo è uguale a 2. Quando $q=3$, l'integrale semplice di prima specie che V ammette oltre u e v deve mantenersi costante lungo ogni superficie ϱ e coincidere con un integrale di prima specie relativo al fascio delle ϱ: d'altro canto ogni integrale di prima specie di questo fascio dà luogo a un integrale dello stesso tipo di V, dunque possiamo dire che nel primo caso il fascio delle superficie ϱ è di genere 1, e nel secondo di genere zero.

Anche il genere geometrico tridimensionale di V nel primo caso è 1 e nel secondo è zero.

Di queste due affermazioni la prima si giustifica subito, con un notissimo ragionamento, per via trascendente; la seconda, in conformità di una utile osservazione dovuta ai sigg. Bagnera e De Franchis [(A), pag. 264], può dedursi dal fatto che la (2) non è una sostituzione unimodulare.

4. Poniamoci ora nel caso che V rappresenti un'involuzione generata sopra una varietà abeliana Φ di rango 1 da un gruppo ciclico (finito) H di trasformazioni birazionali, costituito dalle successive potenze della (2) e sia

$$(3) \qquad \left\| \begin{array}{cccccc} \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 & \Omega_4 & \Omega_5 & \Omega_6 \\ \Omega'_1 & \Omega'_2 & \Omega'_3 & \Omega'_4 & \Omega'_5 & \Omega'_6 \\ \Omega''_1 & \Omega''_2 & \Omega''_3 & \Omega''_4 & \Omega''_5 & \Omega''_6 \end{array} \right\|$$

la tabella dei periodi delle funzioni abeliane che dànno le rappresentazioni parametriche di V e Φ.

Se nelle (2) u, v e w aumentano di un sistema simultaneo di periodi, lo stesso deve accadere di u', v', w': dunque, indicando con le a_{st} degli interi convenienti, debbono sussistere delle uguaglianze del tipo:

$$(4) \qquad \Omega_s = \sum_{i=1}^{i=6} a_{si}\, \Omega_i \ , \ \Omega'_s = \sum_{i=1}^{i=6} a_{si}\, \Omega'_i \ , \ \lambda\, \Omega''_s = \sum_{i=1}^{i=6} a_{si}\, \Omega''_i \qquad (s = 1 \, , \ldots 6).$$

Segue che se si considera l'equazione sestica (*caratteristica*, secondo una nota denominazione dei sigg. Bagnera e De Franchis)

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} a_{11}-\varrho & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22}-\varrho & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66}-\varrho \end{vmatrix} = 0\,,$$

questa deve essere soddisfatta tanto per $\varrho = 1$, quanto per $\varrho = \lambda$.

Diciamo $h\,(\leq 5)$ la caratteristica del determinante (nullo) che si ottiene dal primo membro della (5) facendovi $\varrho = 1$; e dimostriamo che si ha precisamente $h = 2$.

Infatti, se fosse $h = 5$, dalle equazioni (4) si ricaverebbero pei rapporti delle Ω (o delle Ω') valori reali, ciò che è assurdo; nè può essere $h = 1$, poichè in tal caso la radice $\varrho = 1$ sarebbe quintupla (almeno) per l'equazione (5) e λ sarebbe reale. Ma λ è indice primitiva r^{ma} dell'unità ($r > 1$): dunque sarebbe $\lambda = -1$ e l'equazione (5) avrebbe una radice esattamente quintupla in $\varrho = 1$ e una radice semplice in $\varrho = -1$. Allora per $\varrho = -1$ la caratteristica del determinante costituente il primo membro della (5) sarebbe uguale a 5 e quindi le (4) fornirebbero per i rapporti delle Ω'' dei valori reali.

Supponiamo che sia $h = 4$.

Allora fra le sei Ω passano 4 relazioni lineari omogenee indipendenti a coefficienti interi; quindi, secondo un noto procedimento di Weierstrass, le Ω possono esprimersi come combinazioni lineari omogenee a coefficienti interi di due periodi ω_1 e ω_2. E poichè fra le sei Ω' passano le *stesse* 4 relazioni, anche le Ω' possono esprimersi mediante le *stesse* combinazioni lineari omogenee a coefficienti interi di due periodi ω'_1 e ω'_2.

Ma allora, procedendo per addizioni e sottrazioni, alla tabella dei periodi può darsi l'aspetto:

$$\begin{Vmatrix} \tau_1 & \tau_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tau'_1 & \tau'_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tau''_1 & \tau''_2 & \tau''_3 & \tau''_4 & \tau''_5 & \tau''_6 \end{Vmatrix}$$

e quindi è nullo il determinante formato con le parti reali e le parti immaginarie dei periodi: ciò che è notoriamente assurdo.

Un ragionamento del tutto analogo porta alla conclusione che non può essere nemmeno $h = 3$, e quindi resta stabilito, come volevasi, che $h = 2$.

Il fatto che $h = 2$, posto a riscontro con una osservazione precedente, mostra che $\varrho = 1$ è radice esattamente quadrupla per l'equazione (5): dunque

λ è radice primitiva r^{ma} dell'unità soddisfacente a un'equazione quadratica a coefficienti interi.

Ciò porta che su λ possono esser fatte soltanto le ipotesi

$$\lambda = -1\,,\, i\,,\, -i\,,\, \varepsilon\,,\, -\varepsilon\,,\, \varepsilon^2\,,\, -\varepsilon^2 \qquad \left(\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)$$

o anche (come si vede, mutando, in caso, l'operazione generatrice di H)

$$\lambda = -1\,,\, i\,,\, \varepsilon\,,\, -\varepsilon\,.$$

In corrispondenza si ha

$$r = 2\,,4\,,3\,,6.$$

5. Arrivati a questo punto un'analisi aritmetica che non presenta nessuna difficoltà, poichè del tutto analoga a un'altra già compiuta dai professori Bagnera e De Franchis, porta ad una enumerazione precisa dei tipi della varietà V considerata.

Noi ci contenteremo di consegnarne qui i risultati in un quadro che assegna per ogni tipo l'aspetto particolare che può darsi alla tabella dei periodi e all'operazione generatrice del gruppo H, il valore r dell'ordine di H e il valore n del numero dei punti comuni a una superficie ϱ e una curva C, o (estendendo una nota denominazione del prof. Enriques) del *determinante* della varietà V.

Nel numero seguente accenneremo poi come possa ricavarsi caso per caso il valore di n dall'esame *diretto* della tabella dei periodi e dell'operazione generatrice di H.

Le prime due righe della tabella dei periodi le abbiamo sempre ridotte alla forma

$$(6) \qquad \begin{matrix} \omega_1\,, & \omega_2\,, & \omega_3\,, & \omega_4\,, & 0\,, & 0 \\ \omega'_1\,, & \omega'_2\,, & \omega'_3\,, & \omega'_4\,, & 0\,, & 0\,; \end{matrix}$$

quindi per brevità nella colonna del quadro che riguarda tale tabella si trova registrata soltanto la terza riga. Le prime due son sempre sottintese e son sempre date dalle (6).

Infine non occorre fermarsi a chiarire quali siano le condizioni necessarie e sufficienti cui debbono sodisfare i periodi per l'esistenza delle relative funzioni abeliane e quindi delle corrispondenti varietà V: esse risultano da teorie generali notissime e classiche. Osserveremo solo che le varietà V, *quando esistono*, sono *singolari*, in un senso che è l'ovvia generalizzazione di quello in cui tale parola è adoperata dallo Humbert nel caso delle funzioni e delle superficie iperellittiche.

Numero d'ordine dei tipi	Tabella dei periodi	Operazione generatrice di H	Valore di r	Valore di n
I	$\lvert 0,0,0,0,\omega,\omega' \rvert$	$u'=u+\frac{\omega_1}{2}$, $v'=v+\frac{\omega_1'}{2}$, $w'=-w$	2	2
II	$\left\lvert 0,0,0,\frac{\omega}{2},\omega,\omega' \right\rvert$	„	„	4
III	$\left\lvert 0,0,\frac{\omega}{2},\frac{\omega'}{2},\omega,\omega' \right\rvert$	„	„	8
IV	$\lvert 0,0,0,0,\omega,i\omega \rvert$	$u'=u+\frac{\omega_1}{4}$, $v'=v+\frac{\omega_1'}{4}$, $w'=iw$	4	4
V	$\left\lvert 0,0,0,\frac{1+i}{2}\omega,\omega,i\omega \right\rvert$	„	„	8
VI	$\lvert 0,0,0,0,\omega,\varepsilon\omega \rvert$	$u'=u+\frac{\omega_1}{3}$, $v'=v+\frac{\omega_1'}{3}$, $w'=\varepsilon w$	3	3
VII	$\left\lvert 0,0,0,\frac{1-\varepsilon}{3}\omega,\omega,\varepsilon\omega \right\rvert$	„	„	9
VIII	$\lvert 0,0,0,0,\omega,\varepsilon\omega \rvert$	$u'=u+\frac{\omega_1}{6}$, $v'=v+\frac{\omega_1'}{6}$, $w'=-\varepsilon w$	6	6

6. Per dimostrare che, per es., per il tipo II, $n=4$, si osserverà che se le (1) sono le equazioni che dànno la rappresentazione parametrica della corrispondente varietà V, una curva C è rappresentata da:

$$x=\varphi_1(\overline{u},\overline{v},w)\ ,\ y=\varphi_2(\overline{u},\overline{v},w)\ ,\ z=\varphi_3(\overline{u},\overline{v},w)\ ,\ t=\varphi_4(\overline{u},\overline{v},w)$$

e una superficie ϱ da:

$$x=\varphi_1(u,v,\overline{w})\ ,\ y=\varphi_2(u,v,\overline{w})\ ,\ z=\varphi_3(u,v,\overline{w})\ ,\ t=\varphi_4(u,v,\overline{w})$$

$\overline{u}$, $\overline{v}$ e $\overline{w}$ indicando in ogni caso valori quali si vogliano, ma determinati, di u, v o w (¹).

Trovare allora il valore di n, atteso che x, y, z e t si mutano in sè per le operazioni di H, equivale a trovare in quante maniere distinte si può soddisfare con u, v e w alle congruenze (rispetto ai periodi della tabella II come moduli)

$$\overline{u}\equiv u\ ,\ \overline{v}\equiv v\ ,\ w\equiv\overline{w},$$

oppure

$$\overline{u}\equiv u+\frac{\omega_1}{2}\ ,\ \overline{v}\equiv v+\frac{\omega_1'}{2}\ ,\ w\equiv -w.$$

(¹) Notisi che le $\varphi_i(\overline{u},\overline{v},w)$ sono funzioni ellittiche coi periodi ω,ω' e che le $\varphi_i(u,v,\overline{w})$ sono funzioni iperellittiche coi periodi

$$\begin{vmatrix} \omega_1\ ,\ \omega_2\ ,\ \omega_3\ ,\ 2\omega_4 \\ \omega_1'\ ,\ \omega_2'\ ,\ \omega_3'\ ,\ 2\omega_4' \end{vmatrix}.$$

Ciò porta che sulla curva C considerata i punti richiesti sono quelli che corrispondono ai valori $\overline{w}$, $-\overline{w}$, $\overline{w}+\frac{\omega}{2}$ e $-\overline{w}+\frac{\omega}{2}$ del parametro w.

7. Come è noto [(A), pag. 291] dei sette tipi di superficie iperellittiche di genere zero due soli sono equivalenti a piani doppî: qui si può dimostrare invece che:

Degli otto tipi di varietà V *più sopra classificati nessuno è, in generale, equivalente ad uno spazio doppio.*

E infatti supponiamo, se è possibile, che una di codeste varietà sia equivalente ad uno spazio doppio e diciamola V. Allora V è sostegno di una involuzione (razionale) di coppie di punti, che determina una trasformazione birazionale di V in se stessa.

Se x e x' sono due punti corrispondenti in codesta trasformazione e u', v' sono i valori degli integrali di prima specie di V in x', u e v i valori degli integrali stessi in x, u' e v' si possono considerare come i valori, *nel posto* x, di due altri integrali semplici di prima specie: quindi u' e v' sono combinazioni lineari di u e v. Ma allora per la trasformazione in discorso quelle che abbiamo più sopra chiamate le linee C di V non fanno che scambiarsi fra di loro e l'involuzione di coppie di punti su V si rispecchia in un'involuzione di coppie di curve entro la congruenza delle C; o, in altri termini, nella supposta rappresentazione di V sopra uno spazio doppio, le curve C si rappresentano a coppie sulle curve di una congruenza lineare appartenente allo spazio. Ma questa congruenza, per il classico teorema di Castelnuovo sulla razionalità delle involuzioni piane, è razionale, dunque la congruenza iperellittica di rango 1 delle curve C sarebbe sostegno di una involuzione razionale di coppie di curve. Ora i moduli di questa congruenza sono affatto generali, e una superficie iperellittica di rango 1 a moduli generali non contiene involuzioni razionali di coppie di punti, dunque ecc.

8. Riassumendo i risultati ottenuti possiamo pertanto enunciare il teorema:

Se alla varietà V *dotata del gruppo* G *di trasformazioni birazionali in sè si impone la condizione che le curve* C *siano ellittiche, essa non può essere che una varietà abeliana di rango* 1 *oppure una varietà di uno degli otto tipi descritti al n°.* 7. *Di questi nessuno è equivalente a uno spazio doppio e gli ultimi cinque non possono aversi se non supponendo che le curve* C *siano armoniche* (*tipi* IV *e* V) *o equianarmoniche* (*tipi* VI, VII *e* VIII).