ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVIII.

1911

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XX.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1911

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Comunicazioni pervenute all'Accademia sino al 2 luglio 1911.

Aeronautica. — *Sulla sezione trasversale dei palloni dirigibili.* Nota del dott. L. ORLANDO, presentata dal Corrisp. G. LAURICELLA.

I palloni dirigibili hanno generalmente alcuni diaframmi, che li ripartiscono in compartimenti stagni. Ciò si pratica per varie ragioni; alcune, molto evidenti, di sicurezza, ed altre, abbastanza evidenti anch'esse, di stabilità.

Per costruire tali diaframmi, è molto importante conoscere come si presenti, col variare della pressione, la sezione trasversale del dirigibile. La lettura di un recente articolo del capitano L. Mina [1] mi consiglia ad insistere su questo importante caso particolare della forma d'equilibrio dei palloni, e ad esporre alcune idee che possono riuscire utili nell'effettiva costruzione [2].

Vogliamo, in prima approssimazione (che sufficientemente risponde alle esigenze della pratica), ritenere trascurabile l'influenza della terza coordi-

(1) *Sulla forma d'equilibrio dei palloni sferici.* Rivista tecnica d'Aeronautica, gennaio-febbraio 1911.

(2) Il capitano Crocco ha, col migliore successo, adoperato la *vasca dei saggi statici*. Se ne può vedere un cenno nell'opuscolo del comandante Saconney: *Les études d'aérodynamique chez les aérostiers militaires italiens.* Oltre i saggi alla vasca, Crocco ha ideato altri saggi, che possono, insieme coi saggi alla vasca, condurre ad una buona media. Ma un esame teorico della questione è tuttavia opportuno, anche per facilitare lo sfruttamento delle esperienze.

nata, normale alla sezione, cioè longitudinale al dirigibile, e la differenza di densità fra il gas a livello della manica d'appendice e il gas (più compresso) degli strati superiori. Trascureremo anche la deformazione elastica della stoffa; ciò risponde alla pratica per i palloni di seta, specialmente per quelli di cubatura modesta, ma è invece molto discutibile per i palloni di stoffa gommata, sui quali ho fatto alcune ricerche, che mi permetterò di presentare in altra occasione.

Il problema è, nelle ipotesi nelle quali ci poniamo, ridotto ad uno speciale problema d'equilibrio di un filo flessibile ed inestensibile. Esso non differisce sostanzialmente dal problema della *lintearia* o *lintenaria*, salvo che, nel caso di questo classico problema, si suole trascurare il peso della stoffa ([1]).

Sia $p\,ds$ il peso dell'elemento ds, e sia $\varrho z\,ds$ la pressione risentita da quest'elemento (secondo la normale). L'origine delle z si assume un po' più in basso della valvola che chiude, a pochi centimetri d'acqua, la manica d'appendice; e se il pallone ha, invece, il *ballonet*, l'origine si porrà in una posizione equivalente ([2]).

Indicando con T la tensione del filo, e proiettando le forze sulla tangente e sull'orizzontale, noi potremo subito scrivere le due equazioni

$$dT = p\,dz \tag{1}$$

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right) = \varrho z\,dz\,. \tag{2}$$

Integrando l'una e l'altra espressione differenziale, scriveremo

$$T - T_0 = p(z - z_0) \tag{3}$$

$$T\frac{dx}{ds} - U_0 = \varrho\,\frac{z^2 - z_0^2}{2}\,. \tag{4}$$

Con z_0 intendiamo la z dei punti d'attacco della stoffa al trave, con T_0 la tensione in tali punti, e con U_0 la proiezione orizzontale di questa tensione.

Ponendo

$$T_0 - p z_0 = c \tag{5}$$

$$\varrho = 2\sigma \tag{6}$$

$$U_0 - \sigma z_0^2 = k\,, \tag{7}$$

([1]) Jullien, *Problèmes de Mécanique rationnelle*, t. II, pag. 392.

([2]) Per intendere in che consista tale equivalenza, e per farsi una buona idea generale dei problemi dell'aeronautica, è, per esempio, molto raccomandabile l'eccellente Corso di Marchis.

scriveremo la (3) e la (4) come segue

$$(8) \qquad \mathrm{T} = c + pz$$

$$(9) \qquad \mathrm{T}' \frac{dx}{ds} = k + \sigma z^2 .$$

Sostituendo al ds la sua espressione $\sqrt{dx^2 + dz^2}$, ricaviamo

$$(10) \qquad \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \left(\frac{c + pz}{k + \sigma z^2}\right)^2 - 1 = \frac{(c + pz)^2 - (k + \sigma z^2)^2}{(k + \sigma z^2)^2}$$

$$(11) \qquad dx = \frac{(k + \sigma z^2)\, dz}{\sqrt{(c + pz)^2 - (k + \sigma z^2)^2}} .$$

Eseguendo una quadratura, si trova la curva d'equilibrio, facendo corrispondere $x = \pm x_0$ a $z = z_0$: bisognerà fare attenzione alla determinazione del radicale.

Non è certamente la difficoltà di eseguire con sufficiente precisione una quadratura ciò che può spaventare i pratici. Al servizio dei laboratorî bene avviati esistono macchine da calcolo e buoni calcolatori (¹). La difficoltà seria è invece l'effettiva determinazione delle due costanti c, k.

Intanto osserviamo che note le costanti c, k si può avere un buon metodo pratico per costruire approssimativamente la curva, per piccoli archi (come si fa per le arcate policentriche), anche senza calcolare l' integrale ellittico

$$(12) \qquad x - x_0 = \int_{z_0}^{z} \frac{(k + \sigma z^2)\, dz}{\sqrt{(c + pz)^2 - (k + \sigma z^2)^2}} .$$

Osserviamo che $\frac{d^2 z}{dx^2}$ si può scrivere $\frac{d}{dz}\left(\frac{dz}{dx}\right) \cdot \frac{dz}{dx}$. Ricavando dalla (11) la derivata $\frac{dz}{dx}$ in funzione di z, e poi operando come è indicato, troviamo

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{c + pz}{(k + \sigma z^2)^3} (pk - 2c\sigma z - p\sigma z^2) .$$

Dalla (10) risulta subito

$$1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \left(\frac{c + pz}{k + \sigma z^2}\right)^2 ,$$

(¹) Per eseguire con molta precisione una quadratura, si può riferirsi a metodi classici di approssimazione. Il buon senso di chi dirige l'esecuzione materiale dei calcoli permette spesso di raggiungere una notevole economia di operazioni; ma il buon senso dev'essere sorretto da una larga base teorica, senza la quale si rischia di far durare due giorni un calcolo che potrebbe essere terminato in un'ora.

e, richiamando l'espressione del raggio di curvatura, cioè $R = \frac{(1+z'^2)^{3/2}}{z''}$,

scriveremo

$$R = \frac{(c+pz)^2 (k+\sigma z^2)}{pk - 2c\sigma z - p\sigma z^2} \tag{13}$$

Note le costanti, risulta facile un tracciamento approssimativo della curva. L'esperienza suggerisce che, quando i raggi di curvatura sono grandi, bisogna valersi di tratti rettilinei, orientati in modo che valga (11). Con opportuno impiego delle due formule (11) e (13), si può disegnare la curva, abbastanza in grande.

Ma bisogna, come abbiamo detto, determinare le costanti. Intanto, se, in un ordinario dirigibile, ζ rappresenta l'ordinata massima, ivi sarà $\frac{dz}{dx} = 0$, $x = 0$, e l'arco s sarà uguale ad l lunghezza nota della metà dello sviluppo. Sarà dunque, avuto riguardo ai segni,

$$c + p\zeta = k + \sigma\zeta^2 \tag{14}$$

$$-x_0 = \int_{z_0}^{\zeta} \frac{(k+\sigma z^2)\, dz}{\sqrt{(c+pz)^2 - (k+\sigma z^2)^2}} \tag{15}$$

$$l = \int_{z_0}^{\zeta} \frac{(c+pz)\, dz}{\sqrt{(c+pz)^2 - (k+\sigma z^2)^2}}\,. \tag{16}$$

Queste tre relazioni fra c, k, ζ determinano le tre grandezze. In pratica converrà naturalmente valersi di metodi di falsa posizione, perchè, se è facile valutare con tutta l'approssimazione desiderata un integrale ellittico contenente parametri noti, non è altrettanto facile determinare c, k, ζ dalle tre relazioni (14), (15), (16), dove queste grandezze entrano nel modo più intrinseco.

Invece di l, noi potremmo darci la forza ascensionale. Proiettiamo le forze sulla verticale, e troveremo l'equazione

$$d\left(T \frac{dz}{ds}\right) = p\,ds - \varrho z\, dx\,, \tag{17}$$

dalla quale si ricava

$$\sqrt{T_0^2 - U_0^2} = pl - \varrho \int_{z_0}^{\zeta} z \frac{dx}{dz}\, dz\,, \tag{18}$$

cioè

$$\sqrt{T_0^2 - U_0^2} = pl - \varrho \int_{z_0}^{\zeta} \frac{(kz + \sigma z^3)\, dz}{\sqrt{(c+pz)^2 - (k+\sigma z^2)^2}}\,.$$

Sommando con pl dedotto dalla (16), e tenendo presente che ϱ vale 2σ, e che ζ verifica la (14), si ottiene

$$T_0^2 - U_0^2 = (c + pz_0)^2 - (k + \sigma z_0^2)^2 .$$

Le (8), (9) accusano che questa è una relazione identica, perciò dare l, ai fini del problema, è come dare la forza ascensionale $\sqrt{T_0^2 - U_0^2}$, nei punti d'attacco del trave. Quest'apparente paradosso, che potrebbe impensierire i pratici, si spiega benissimo quando si pensi chè è ancora disponibile z_0 cioè la lunghezza della manica d'appendice. Notiamo ancora una volta che si prescinde dalla terza coordinata.

Matematica. — *L'equazione integrale di Volterra di seconda specie con un limite dell'integrale infinito.* Nota del dott. G. C. Evans, presentata dal Corrisp. G. Lauricella.

1. Consideriamo l'equazione integrale con un parametro λ

$$u(x) = \varphi(x) + \lambda \int_x^\infty K(x, \xi)\, u(\xi)\, d\xi , \tag{1}$$

lo studio della quale mi è stato consigliato dal prof. Volterra.

Supponiamo che la funzione $\varphi(x)$ sia continua nel tratto $x \geqq a$, e limitata ($|\varphi(x)| \leqq P_1$) ; $K(x, y)$ sia continua nel triangolo corrispondente $a \leqq x \leqq y$, e limitata ($|K(x, y)| \leqq P_2$), e l'integrale $\int_x^\infty |K(x, \xi)|\, d\xi$ esista. Si ha immediatamente il teorema seguente (¹):

Se oltre le ipotesi già assunte si ha $\int_x^\infty |K(x, \xi)|\, d\xi \leqq M$ *per* $x \geqq a$, *si può trovare un valore* $\lambda_0 \left(\lambda_0 \geqq \frac{1}{M}\right)$ *in modo che per ogni valore di* λ *tale che* $|\lambda| < \lambda_0$ *vi sarà una e una sola soluzione* $u(x)$, *finita e integrabile, dell'equazione* (1).

La soluzione può scriversi nella forma

$$u(x) = \varphi(x) - \int_x^\infty k(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi , \tag{2}$$

dove la funzione $k(x, \xi)$, nucleo dell'equazione risolvente, è una funzione continua nel campo $a \leqq x \leqq y$, e finita (²).

(¹) Rend. della R. Acc. dei Lincei, vol. XX, serie 5ª, 1911, 1° sem., fasc. 9°.
(²) Si veda (¹) a pag. 662.