ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVIII.

1911

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XX.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1911

Matematica. — *Sulle condizioni sufficienti per il minimo nel calcolo delle variazioni* (*Gli integrali sotto forma non parametrica*). Nota di EUGENIO ELIA LEVI, presentata dal Socio L. BIANCHI.

1. Nel presente assetto del calcolo delle variazioni, il concetto di campo di estremali, introdotto dal Weierstrass, ha singolare importanza, come quello che solo fin qui permette di dimostrare la sufficienza delle condizioni di minimo. Tanto che, — mentre il Weierstrass dimostrava la necessità delle condizioni di Legendre e di Jacobi, seguendo questi suoi predecessori, mediante la teoria della variazione seconda, e su quelle fondava poi la dimostrazione dell'esistenza del campo, — parve allo Kneser, che, non potendosi fare a meno del concetto di campo, maggiore unità per la teoria si potesse raggiungere soltanto col lasciare da parte la teoria della variazione seconda, e col cercare di mostrare sia la necessità che la sufficienza delle condizioni di minimo basandosi sul concetto di campo; a ciò egli pervenne col bel teorema sugli inviluppi di estremali (Enveloppensatz).

Tale procedimento non è però scevro di inconvenienti assai gravi. Intanto da una parte per quanto riguarda la dimostrazione della *necessità* delle condizioni di minimo, mentre la teoria della variazione seconda si estende con discreta facilità ai casi più complessi, il procedimento ora ricordato dello Kneser non risulta sempre di facile applicazione [1]. D'altra parte, per quanto riguarda la *sufficienza* delle condizioni di minimo, non sempre è possibile e sempre è assai faticoso il mostrare che l'esistenza del campo segue dalle condizioni di Legendre e di Jacobi; invero tale dimostrazione richiede uno studio assai accurato delle soluzioni dell'equazione di Eulero: tanto che ad es. nel caso degli integrali multipli, i teoremi di esistenza delle soluzioni delle equazioni ellittiche alle derivate parziali non sono per ora sufficienti a stabilire tale proposizione (se pure è vero che i progressi fatti recentemente in tale campo di studî possono farci sperare che in tempo non lontano anche queste difficoltà possano essere superate); onde la teoria dei massimi e dei minimi degli integrali multipli presenta qui per ora una grave lacuna.

Nè basta: appena lasciamo il caso del più semplice problema del calcolo delle variazioni *è lo stesso concetto di campo che risulta deficiente* nella dimostrazione della sufficienza delle condizioni di minimo. Così nell'ordinario problema isoperimetrico già il Weierstrass, si incontrava in una

[1] Cfr. le osservazioni del Bolza a pag. 634 delle *Vorlesungen über Variationsrechnung*. Teubner (1909).

tale difficoltà, e solo recentemente il Lindeberg [1] riusciva a superarla con un procedimento assai elegante, ma del tutto lontano da quelli usati nel resto della teoria. Similmente nei problemi con estremi variabili il campo viene ad avere necessariamente punti singolari [2]; onde convenne allo Hahn completare lo studio ricorrendo alle spezzate di estremali [3]. Ed infine nei problemi di massimo e di minimo per gli integrali contenenti derivate di ordine $p \geqq 2$, il concetto di campo non serve che nell'ipotesi che le curve variate restino in un intorno di ordine $p-1$ della curva studiata [4], onde ancora non si conoscono le condizioni sufficienti per il minimo forte.

Mi pare quindi che possa non essere privo di qualche interesse, sia per i risultati effettivi che per l'esposizione sistematica, il mostrare come, lasciato da parte il concetto di campo, gli antichi metodi di trasformazione di Legendre e di Jacobi possano servire a provare la sufficienza delle condizioni del minimo forte. A tale uopo è dedicata questa Nota ed alcune altre che seguiranno; l'osservazione fondamentale è che la funzione $\mathcal{E}$ di Weierstrass rappresenta la parte della variazione totale dell'integrando che non diviene infinitesima col tendere a zero della massima distanza della curva variata dalla curva che si studia: e che quindi i ragionamenti di Legendre e di Jacobi relativi alla variazione seconda, quando in questa all'insieme dei termini in cui entrano solo le variazioni delle derivate si sostituisca la funzione $\mathcal{E}$ dovranno esser capaci di darci la dimostrazione del minimo. Qui mi limiterò a sviluppare questo concetto nei suoi particolari per il più semplice problema del calcolo delle variazioni, affinchè risulti più evidente la struttura del ragionamento. Mi riserbo di tornare più tardi sull'applicazione di esso a problemi meno semplici, onde mostrare la capacità che questo metodo ha di risolvere in modo uniforme i problemi sopra ricordati, in cui il concetto di campo non pare sufficiente.

2. Comincerò collo studiare il problema in forma non parametrica: si avrà da cercare quando una curva dà all'integrale

$$(1) \qquad \mathrm{I} = \int_{x_1}^{x_2} f(xyy')\, dx \qquad (x_1 \leqq x_2)$$

il minimo valore rispetto alle curve $\mathfrak{C}$ di equazione $y = y(x)$, che stanno in una certa regione $\mathfrak{R}$ del piano xy, e passano per i due punti $\mathrm{P}_1 \equiv (x_1 y_1)$,

[1] Lindeberg, *Ueber einige Fragen der Variationsrechnung*. Math. Ann. (1909), vol. 67, pag. 346. Vedi pure Lindeberg, *Zur Theorie des relativen Extremums* etc. Math. Ann. (1904), vol. 59, pag. 332; Bolza, loc. cit., § 94.

[2] Tali difficoltà furono segnalate da Bolza (loc. cit., pag. 523), Bliss e Mason (Am. Transactions (1908), vol. 9, pag. 440), Radon (Wiener Berichte 119, pag. 1294).

[3] Hahn, *Ueber Variationsprobleme mit variablen Endpunkten*. Monatshefte für Math. und Phys., vol. XXII (1911), pag. 127. Tale considerazione servì allo Hahn già in molti problemi.

[4] Cfr. Hadamard, *Leçons sur le calcul des variations*, vol. I, pp. 458-465.

$P_2 \equiv (x_2 y_2)$. Ammetterò con Bolza che f sia di classe C‴ quando (xy) sia in $\mathfrak{R}$ ed y' sia finito; dirò $M_{\varrho'}$ il massimo delle sue derivate di terz'ordine fatte rapporto a y e y' per (xy) in $\mathfrak{R}$ ed $|y'| < \varrho'$. Indicherò con $\overset{\circ}{\mathfrak{C}}$ un estremale $y = \overset{\circ}{y}(x)$ passante per i punti P_1 e P_2: porrò

$$(1) \qquad P = f''_{y'^2}(x\overset{\circ}{y}\overset{\circ}{y}{}') \;,\; Q = f''_{yy'}(x\overset{\circ}{y}\overset{\circ}{y}{}') \;,\; R = f''_{y'^2}(x\overset{\circ}{y}\overset{\circ}{y}{}') ;$$

e supporrò che sia $|\overset{\circ}{y}{}'| \leq \varrho'_1$. Mi propongo di mostrare anzitutto che: *se nei punti di* $\overset{\circ}{\mathfrak{C}}$ *sono soddisfatte le condizioni seguenti*

1° (2) $R > 0$

2° (3) $\mathcal{E}(x\overset{\circ}{y}\,;\overset{\circ}{y}{}'y') > 0$ *per* $0 < |y' - \overset{\circ}{y}{}'| \leq r'$,

3° *il punto coniugato* x'_1 *di* x_1 *su* $\overset{\circ}{\mathfrak{C}}$ *precede* x_2,

si può trovare un numero r *tale che* $\overset{\circ}{\mathfrak{C}}$ *dia ad* I *il minimo valore rispetto a tutte le curve* $\mathfrak{C}$, *per cui è*

$$(4) \qquad |y - \overset{\circ}{y}| < r \quad , \quad |y' - \overset{\circ}{y}{}'| \leq r'$$

e che passano per P_1 *e* P_2.

Occorre perciò dare alla variazione totale ΔI che I subisce quando si passa da $\overset{\circ}{\mathfrak{C}}$ a $\mathfrak{C}$ una particolare espressione. Nel fare le trasformazioni a ciò necessarie, noi supporremo senz'altro $\mathfrak{C}$ di classe C″: è noto che se $\overset{\circ}{\mathfrak{C}}$ dà ad I il minimo rispetto a tali curve, lo dà pure rispetto alle curve di classe D′ [1].

Ciò posto, si indichi per brevità, con η la funzione $y - \overset{\circ}{y}$; rammentando che $\mathcal{E}(xy\,;\overset{\circ}{y}{}'y') = f(xyy') - f(xy\overset{\circ}{y}{}') - \eta' f_{y'}(xy\overset{\circ}{y}{}')$, si ha

$$(5) \qquad \begin{aligned} \Delta I &= \int_{x_1}^{x_2} [f(xyy') - f(x\overset{\circ}{y}\overset{\circ}{y}{}')]\,dx = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} [\mathcal{E}(xy\,;\overset{\circ}{y}{}'y') + (f(xy\overset{\circ}{y}{}') - f(x\overset{\circ}{y}\overset{\circ}{y}{}')) + \eta' f_{y'}(xy\overset{\circ}{y}{}')]\,dx\,. \end{aligned}$$

Sviluppando $f(xy\overset{\circ}{y}{}') - f(x\overset{\circ}{y}\overset{\circ}{y}{}')$ mediante la formula di Taylor e rammentando che $\overset{\circ}{\mathfrak{C}}$ è un estremale, si ha

$$(6) \qquad \begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} [f(xy\overset{\circ}{y}{}') - f(x\overset{\circ}{y}\overset{\circ}{y}{}')]\,dx &= \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \eta f'_y(x\overset{\circ}{y}\overset{\circ}{y}{}') + \frac{1}{2}\eta^2 P + \eta^3 \lambda_1 \right\} dx = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left\{ -\eta' f'_y(x\overset{\circ}{y}\overset{\circ}{y}{}') + \frac{1}{2}\eta^2 P + \eta^3 \lambda_1 \right\} dx\,, \end{aligned}$$

[1] Cfr. Bolza, loc. cit., pp. 85-86. Basterebbe anzi supporre $\mathfrak{C}$ analitica; cfr. Hadamard, loc. cit. pp. 51 e sg.

dove si è posto, indicando $\bar{y}$ un conveniente valore compreso fra $\mathring{y}$ e y,

$$\lambda_1(xy\mathring{y}\mathring{y}') = \frac{1}{3!} f'''_{y^3}(x\bar{y}\mathring{y}'). \tag{7}$$

Sostituendo (6) in (5) otteniamo

$$\begin{aligned} \Delta \mathrm{I} &= \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \mathcal{E}(xy\,;\mathring{y}'y') + \frac{1}{2} \mathrm{P}\eta^2 + \eta'[f'_{y'}(xy\mathring{y}') - f'_{y'}(x\mathring{y}\mathring{y}')] + \eta^3\lambda_1 \right\} dx = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \mathcal{E}(xy\,;\mathring{y}'y') + \frac{1}{2}(\mathrm{P}\eta^2 + 2\eta\eta'\mathrm{Q}) \right\} dx + \int_{x_1}^{x_2} (\eta^3\lambda_1 + \eta^2\eta'\lambda_2)\, dx\,, \end{aligned} \tag{8}$$

dove in modo analogo a (7) si è posto, indicando con $\bar{\bar{y}}$ un valore compreso fra $\mathring{y}$ e y,

$$\lambda_2(xy\mathring{y}\mathring{y}') = \frac{1}{2!} f'''_{y'y^2}(x\bar{\bar{y}}\mathring{y}')\,. \tag{9}$$

3. La (8) si può ancora trasformare. Si noti che

$$\mathcal{E}(xy\,;\mathring{y}'y') = \left[\frac{1}{2} f''_{y'^2}(xy\mathring{y}') + \lambda_4\eta'\right]\eta'^2 = \left[\frac{1}{2}\mathrm{R} + \lambda_3\eta + \lambda_4\eta'\right]\eta'^2, \tag{10}$$

dove si è posto

$$\lambda_3(xy\mathring{y}\mathring{y}') = \frac{1}{2!} f'''_{y'^2y}(x\overset{\equiv}{y}\mathring{y}')\ ,\ \lambda_4(xy\mathring{y}'y') = \frac{1}{3!} f'''_{y'^3}(xy\bar{y}')\,, \tag{11}$$

$\overset{\equiv}{y}$, $\bar{y}'$ indicando valori intermedii rispettivamente tra y e $\mathring{y}$, y' e $\mathring{y}'$.

Sicchè sostituendo (10) in (8) avremo

$$\begin{aligned} \Delta \mathrm{I} &= \frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2} (\mathrm{P}\eta^2 + 2\mathrm{Q}\eta\eta' + \mathrm{R}\eta'^2)\, dx + \\ &\qquad + \int_{x_1}^{x_2} (\lambda_1\eta^3 + \lambda_2\eta^2\eta' + \lambda_3\eta\eta'^2 + \lambda_4\eta'^3)\, dx\,. \end{aligned} \tag{12}$$

Questa formula non differisce realmente nell'aspetto da quella che si otterrebbe sviluppando $f(xyy') - f(x\mathring{y}\mathring{y}')$ mediante la formula di Taylor arrestata ai termini di 3° ordine: però il modo speciale di dedurla conferisce alle λ_3, λ_4 proprietà che ci permettono di dimostrare il teorema sopra enunciato.

Introduciamo perciò le ipotesi del nostro teorema. Le ipotesi 1° e 2° si possono riassumere in questa che $\dfrac{\mathcal{E}(xy\,;\mathring{y}'y')}{(\mathring{y}' - y')^2}$ è sempre > 0 per $y = \mathring{y}(x)$, $|y' - \mathring{y}'| \leq r'$: ne segue che si possono determinare due numeri r_1 e μ positivi e tali che per $|y - \overset{\circ}{y}(x)| \leq r_1$, $|y' - \overset{\circ}{y}| \leq r'$ sia

$$\frac{\mathcal{E}(xy\,;\overset{\circ}{y}y')}{(\overset{\circ}{y}' - y')^2} > \mu. \tag{13}$$

Per (10) avremo dunque per $|\eta| \leq r_1$, $|\eta'| \leq r'$,

$$\frac{1}{2}\mathrm{R} + \lambda_3\eta + \lambda_4\eta' > \mu. \tag{14}$$

D'altra parte l'ipotesi 3° ci dice che esiste una soluzione $u(x)$ dell'equazione

$$(\mathrm{P} - \mathrm{Q}')\,u - \frac{d}{dx}(\mathrm{R}u') = 0$$

sempre $\neq 0$ per $x_1 \leq x \leq x_2$: poniamo che si abbia

$$0 < m_1 \leq u \leq m_2\,,\ |u'| \leq m_3\,. \tag{15}$$

Si ponga infine

$$\eta(x) = p(x)\,u(x)\,, \tag{16}$$

sarà $p(x)$, come $\eta(x)$, una funzione finita e continua, di classe C'', nulla negli estremi x_1 e x_2. Si avrà quindi [1]

$$\int_{x_1}^{x_2} p^2\,dx \leq k\int_{x_1}^{x_2} p'^2\,dx \qquad k = \frac{(x_2 - x_1)^2}{\pi^2}\,. \tag{17}$$

[1] Cfr. Hadamard, loc. cit., pp. 334-335, n. 272. L'Hadamard deduce questa formula coi metodi del calcolo delle variazioni — ma indipendentemente dal teorema che qui vuolsi dimostrare. Del resto si può facilmente dedurre una limitazione un po' più larga, ma ai nostri scopi equivalente fondandosi solo sulle formule di Schwarz e Dirichlet. Si può supporre che sia $x_2 > x_1$. Per la prima di queste formule essendo $p(x_1) = 0$, si ha, per $x \geq x_1$

$$p^2(x) = \left(\int_{x_1}^{x} p'(\xi)\,d\xi\right)^2 \leq (x - x_1)\int_{x_1}^{x} p'^2(\xi)\,d\xi:$$

ed allora per la formula di Dirichlet è

$$\int_{x_1}^{x_1 + \frac{x_2 - x_1}{2}} p^2(x)\,dx \leq \int_{x_1}^{x_1 + \frac{x_2 - x_1}{2}} (x - x_1)\,dx \int_{x_1}^{x} p'^2(\xi)\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_1 + \frac{x_2 - x_1}{2}} p'^2(x)\left[\frac{(x_2 - x_1)^2}{4} (x - x_1)^2\right]dx \leq \frac{(x_2 - x_1)^2}{8}\int_{x_1}^{x_1 + \frac{x_2 - x_1}{2}} p'^2(x)\,dx.$$

Similmente essendo $p(x_2) = 0$ si ottiene

$$\int_{x_1 + \frac{x_2 - x_1}{2}}^{x_2} p^2(x)\,dx \leq \frac{(x_2 - x_1)^2}{8}\int_{x_1 + \frac{x_2 - x_1}{2}}^{x_2} p'^2(x)\,dx:$$

onde sommando

$$\int_{x_1}^{x_2} p^2\,dx \leq \frac{(x_2 - x_1)^2}{4}\int_{x_1}^{x_2} p'^2\,dx\,.$$

E di qui, osservando che $|pp'| \leq \frac{1}{2}\{p^2 + p'^2\}$:

$$\int_{x_1}^{x_2} |pp'|\, dx \leq \frac{1}{2}(k+1)\int_{x_1}^{x_2} p'^2\, dx \,. \tag{18}$$

Ciò posto, applicando la nota trasformazione di Jacobi e cioè sostituendo in (12) a η ed η' i valori tratti da (16), si ha

$$\begin{aligned} \Delta \mathrm{I} &= \frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{R} u^2 p'^2\, dx + \int_{x_1}^{x_2} (\lambda_1 \eta^3 + \lambda_2 \eta^2 \eta' + \lambda_3 \eta'^2 \eta + \lambda_4 \eta'^3)\, dx = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{1}{2}\mathrm{R} + \lambda_3 \eta + \lambda_4 \eta'\right) u^2 p'^2\, dx + \\ &\quad + \int_{x_1}^{x_2} [\lambda_1 \eta^3 + \lambda_2 \eta^2 \eta' + (\lambda_3 \eta + \lambda_4 \eta')(u'^2 p^2 + 2\eta u' p')]\, dx \,. \end{aligned} \tag{19}$$

Ma per (14), (15), se $|\eta| \leq r_1$, $|\eta'| \leq r'$

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{1}{2}\mathrm{R} + \lambda_3 \eta + \lambda_4 \eta'\right) u^2 p'^2\, dx \geq \mu m_1^2 \int_{x_1}^{x_2} p'^2\, dx \,. \tag{20}$$

D'altra parte, se rammentiamo che $|\mathring{y}'| \leq \varrho_1'$, e, indicando con r una quantità $\leq r_1$ per ora indeterminata, supponiamo $|\eta| \leq r$, avremo per (7), (15), (16), (17):

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} \lambda_1 \eta^3\, dx\right| \leq \frac{1}{3!}\mathrm{M}_{\varrho_1'}\, m_2^2 r \int_{x_1}^{x_2} p^2\, dx \leq \frac{1}{3!}\mathrm{M}_{\varrho_1'}\, k m_2^2 r \int_{x_1}^{x_2} p'^2\, dx \,. \tag{21}$$

Analogamente per (9), (11), (15), (16), (17), (18)

$$\begin{aligned} \left|\int_{x_1}^{x_2} \lambda_2 \eta^2 \eta' dx\right| &\leq \frac{1}{2!}\mathrm{M}_{\varrho_1'}\, r \int_{x_1}^{x_2} |\eta\eta'|\, dx = \frac{1}{2}\mathrm{M}_{\varrho_1'}\, r \int_{x_1}^{x_2} |uu'p^2 + u^2 pp'|\, dx \leq \\ &\leq \frac{1}{2}\mathrm{M}_{\varrho_1'}\, m_2 r \left\{ k m_3 + \frac{1}{2}(1+k) m_2 \right\} \int_{x_1}^{x_2} p'^2\, dx \\ \left|\int_{x_1}^{x_2} \lambda_3 \eta (u'^2 p^2 + 2\eta u' p')\, dx\right| &\leq \frac{1}{2}\mathrm{M}_{\varrho_1'}\, r \int_{x_1}^{x_2} |u'^2 p^2 + 2uu'pp'|\, dx \leq \\ &\leq \frac{1}{2}\mathrm{M}_{\varrho_1'}\, m_3 r \left\{ k m_3 + (1+k) m_2 \right\} \int_{x_1}^{x_2} p'^2\, dx. \end{aligned} \tag{22}$$

Infine, rammentando che per (16), (15) è $|p| < \frac{r}{m_1}$ e che essendo $|\mathring{y}'| \leq \varrho_1'$, $|y' - \mathring{y}'| \leq r'$, la quantità $\overline{y}'$ della formula (11) è in modulo inferiore a $\varrho' = \varrho'_1 + r'$, avremo

$$\int_{x_1}^{x_2} \lambda_4 \eta'(u'^2 p^2 + 2\eta u'p')\, dx \leq$$

$$(23) \qquad \leq \frac{1}{3!} \mathrm{M}_{\varrho'} \int_{x_1}^{x_2} | u'^3 p^3 + 2\eta u'^2 pp' + \eta u'^2 p'^2 + 2\eta u u' pp' |\, dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{3!} \mathrm{M}_{\varrho'}\, m_3\, r \left\{ \frac{m_3^2 k}{m_1} + m_3(2+k) + m_2(1+k) \right\} \int_{x_1}^{x_2} p'^2\, dx \,.$$

Raccogliendo da (19), (20), (21), (22), (23) deduciamo che se $|\eta| \leq r \leq r_1$

$$(24) \qquad \Delta \mathrm{I} > (\mu m_1^2 - r\mathrm{H}) \int_{x_1}^{x_2} p'^2\, dx$$

dove

$$(25) \qquad \begin{aligned} \mathrm{H} = \frac{1}{3!} \mathrm{M}_{\varrho'_1} \left[\frac{3}{2} m_2^2 + \frac{5}{2} k m_2^2 + 6 k m_2 m_3 + 3 m_2 m_3 + k m_3^2 \right] + \\ + \frac{1}{3!} \mathrm{M}_{\varrho'}\, m_3 \left[\frac{m_3^2 k}{m_1} + m_3(2+k) + m_2(1+k) \right] . \end{aligned}$$

Basterà quindi prendere per r un numero inferiore a $\frac{\mu m_1^2}{\mathrm{H}}$ perchè ne segua $\Delta \mathrm{I} \leq 0$, c. v. d.

Citologia. — *Sulla presenza del glicogeno nelle fanerogame, e sua relazione coll'ossalato di calcio* [1]. Nota del dott. Ioannes Politis di Atene, presentata dal Socio Giovanni Briosi.

Storia. — Dopo che Claude Bernard nel 1857 scoperse il glicogeno nel fegato dei mammiferi, le osservazioni di molti autori hanno dimostrato la sua grande diffusione nel regno animale.

Nel regno vegetale, Kühne per primo ebbe a segnalarlo in un mixomicete, l'*Aethalium septicum*; poi Behrend, Külz, Reinke et Rodewald mostrarono la sua analogia completa col glicogeno del fegato dei mammiferi.

Nelle piante fu però dimostrata l'esistenza del glicogeno in modo positivo dai lavori di Errera. Prima di lui, Tulasne aveva già osservato che il contenuto degli aschi dei tartufi si colora, in un certo periodo della loro evoluzione, in rosso-bruno molto oscuro, sotto l'influenza dell'iodio; che questa reazione non si verifica negli aschi molto giovani, ma appare in seguito, poi diminuisce di intensità a misura che gli aschi maturano, per scomparire infine quando le spore hanno terminato il loro sviluppo.

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico della R. Università di Pavia.