ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVIII.

1911

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XX.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1911

verna, e propriamente nel vallone Vurieddu, a circa due chilometri di distanza da Lagonegro, venti anni fa fu scoperta e distrutta con le mine, pei lavori ferroviarii, un'altra assai più interessante caverna, in cui si rinvennero vasi, oggetti di osso e bellissime, stupende armi di pietre verdi, di cui mi è occorso vedere alcune, ancora conservate per ignara curiosità in qualche casa di Lagonegro.

Anche dunque questa caverna del Gauro, come tante altre d'Italia, presenta lati oscuri, degni di essere rischiarati dai competenti in materia. Ed io ho scritto questa Nota, appunto per incitare i paletnologi ed archeologi a venire ad esplorare questa ed altre ancora ignote sedi preistoriche delle estreme, più alte ed inesplorate montagne lucane.

Matematica. — *Sul calcolo del nucleo dell'equazione risolvente per una data equazione integrale.* Nota del dott. Evans, presentata dal Socio V. Volterra.

Considereremo, in questa Nota, l'equazione integrale

$$(A) \qquad u(x) = \varphi(x) + \int_a^x K(x, \xi)\, u(\xi)\, d\xi,$$

e supporremo che la funzione conosciuta, $\varphi(x)$, sia continua in un certo intervallo $a \leqq x \leqq b$, e il nucleo, $K(x, y)$, sia continuo nel triangolo corrispondente $a \leqq x \leqq y \leqq b$. Inoltre supporremo che anche le derivate, di queste funzioni, quando compariranno, sieno continue nei rispettivi campi.

Noi chiameremo il nucleo dell'aquazione risolvente dell'equazione (A), come si fa qualche volta per brevità, la « funzione associata » al dato nucleo.

§ 1. — Un teorema sulla combinazione di nuclei.

1. Consideriamo l'espressione

$$(1) \qquad \int_y^x \left(\int_\xi^x K_1(x, \xi')\, K_2(\xi', \xi)\, d\xi' \right) \left(\int_y^\xi k_1(\xi, \xi')\, k_2(\xi', y)\, d\xi' \right) d\xi$$

dove le quattro funzioni $K_1(x, y)$, $K_2(x, y)$, $k_1(x, y)$, $k_2(x, y)$ sieno permutabili [1] fra loro. Facendo uso della notazione del prof. Volterra possiamo scriverla come il prodotto simbolico delle quattro funzioni:

$$\big(K_1(x, y)\, K_2(x, y)\big)\, \big(k_1(x, y)\, k_2(x, y)\big)$$

[1] V. Volterra, R. Accademia dei Lincei, Vol. XIX, fasc. 4°, 1° semestre, febbraio 1910.

il quale godrà della proprietà associativa, e in causa della supposta permutabilità delle quattro funzioni fra loro, anche della proprietà commutativa. Quindi possiamo scriverlo mediante il prodotto:

$$K_1(x, y) \{ k_1(x, y) \left(K_2(x, y) k_2(x, y) \right) \}$$

ossia mediante l'espressione

$$(2) \qquad \int_y^x d\xi \, K_1(x, \xi) \int_y^\xi d\xi' k(\xi, \xi') \int_y^\xi K_2(\xi', \xi'') k_2(\xi'', y) \, d\xi'',$$

la quale è dunque eguale all'espressione (1), e ottenuta da essa mediante un cambiamento nell'ordine di integrazione.

2. Supponiamo che le funzioni $k_1(x, y)$, $k_2(x, y)$ sieno rispettivamente le funzioni associate alle funzioni $K_1(x, y)$ $K_2(x, y)$, cioè che si abbiano le equazioni:

$$(B) \qquad K_i(x, y) + k_i(x, y) = \int_y^x K_i(x, \xi) k_i(\xi, y) \, d\xi =$$
$$= \int_y^x k_i(x, \xi) K_i(\xi, y) \, d\xi, \qquad i = 1, 2.$$

Allora se le due funzioni $K_1(x, y)$, $K_2(x, y)$ sono permutabili, saranno tutte e quattro le funzioni, $K_1(x, y)$, $K_2(x, y)$, $k_1(x, y)$, $k_2(x, y)$ permutabili fra loro, come si vede facilmente.

Per mezzo dell'equazioni (B) possiamo scrivere l'espressione (2) nella forma:

$$(3) \qquad \int_y^x d\xi \, K_1(x, \xi) \int_y^\xi k_1(\xi, \xi') K_2(\xi', y) \, d\xi' +$$
$$+ \int_y^x d\xi \, K_1(x, y) \int_y^\xi k_1(\xi, \xi') k_2(\xi' y) \, d\xi'$$

la quale, in causa della proprietà della permutabilità, è identica alla seguente:

$$(4) \qquad \int_y^x d\xi \, K_2(x, \xi) \int_y^\xi K_1(\xi, \xi') k_1(\xi' y) \, d\xi' +$$
$$+ \int_y^x d\xi \, k_1(x, \xi) \int_y^\xi K_1(\xi, \xi') k_2(\xi' y) \, d\xi'.$$

3. Supponendo che si abbia

$$K_1(x, y) = - K_2(x, y) = K(x, y),$$

la condizione della permutabilità sarà soddisfatta, il secondo integrale della (4) diverrà

$$-\int_y^x d\xi\, k_1(x\,,\xi) \int_y^\xi \mathrm{K}_2(\xi\,,\xi')\, k_2(\xi' y)\, d\xi',$$

e quindi, facendo uso dell'equazioni (B) e semplificando, potremo scrivere la (4) nella forma

$$(5) \qquad -\int_y^x \mathrm{K}(x\,,\xi)\,\mathrm{K}(\xi\,,y)\, d\xi - \int_y^x k_1(x\,,\xi)\, k_2(\xi\,,y)\, d\xi$$

e ritornando all'espressione (1), si avrà l'equazione

$$(6) \qquad \int_y^x \mathrm{K}(x\,,\xi)\,\mathrm{K}(\xi\,,y)\, d\xi + \int_y^x k_1(x\,,\xi)\, k_2(\xi\,,y)\, d\xi =$$

$$= \int_y^x \left(\int_\xi^x \mathrm{K}(x\,,\xi')\,\mathrm{K}(\xi'\,,\xi)\, d\xi' \right) \left(\int_y^\xi k_1(\xi\,,\xi')\, k_2(\xi' y)\, d\xi \right) d\xi\,,$$

la quale non è altro che un'equazione del tipo (B).

Quindi si ha il teorema:

Teorema: *Se $k_1(x\,,y)$ è la funzione associata alla funzione $\mathrm{K}(x\,,y)$, e $k_2(x\,,y)$ quella associata alla funzione $-\mathrm{K}(x\,,y)$, ne segue che*

$$\int_y^x k_1(x\,,\xi)\, k_2(\xi\,,y)\, d\xi$$

è la funzione associata a

$$\int_y^x \mathrm{K}(x\,,\xi)\,\mathrm{K}(\xi\,,y)\, d\xi\,.$$

Nella stessa maniera si avrà il teorema:

Teorema: *Se $k_i(x\,,y)$ è la funzione associata alla funzione $\omega^i \mathrm{K}(x\,,y)$ per $i = 1\,,2\,,\ldots,n$, quando $\omega = \sqrt[n]{1}$, ne segue che*

$$\int_y^x d\xi\, k_1(x\,,\xi) \int_y^\xi d\xi' k_2(\xi\,,\xi') \int_y^{\xi'} d\xi'' \ldots$$

$$\ldots \int_y^{\xi^{(n-3)}} k_{n-1}(\xi^{(n-3)}\,,\xi^{(n-2)})\, k_n(\xi^{(n-2)}\,,y)\, d\xi^{(n-2)}$$

è la funzione associata a

$$\int_y^x d\xi\, \mathrm{K}(x\,,\xi) \int_y^\xi d\xi'\, \mathrm{K}(\xi\,,\xi') \int_y^{\xi'} d\xi'' \ldots$$

$$\ldots \int_y^{\xi^{(n-3)}} \mathrm{K}(\xi^{(n-3)}\,,\xi^{(n-2)})\, \mathrm{K}(\xi^{(n-2)}\,,y)\, d\xi^{(n-2)}.$$

Il primo di questi integrali può esprimersi mediante il prodotto simbolico $\prod_{i=1}^{n} k_i(x, y)$ e il secondo mediante la potenza simbolica $(\mathrm{K}(x, y))^n$.

§ 2. — Il nucleo è soluzione di un'equazione differenziale lineare, omogena, in una sola variabile.

4. Supponiamo che il nucleo $\mathrm{K}(x, y)$ soddisfaccia ad un'equazione del tipo

$$\sum_{i=0}^{n} f_i(x) \frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathrm{K}(x, y) = 0 \tag{1}$$

o del tipo

$$\sum_{i=0}^{m} \varphi_i(y) \frac{\partial^i}{\partial y^i} \mathrm{K}(x, y) = 0. \tag{2}$$

I due casi sono analoghi. Consideriamo dunque solamente il caso (1).

Dall'equazione (B) si ha l'equazione

$$\frac{\partial^i}{\partial x^i} \mathrm{K}(x, y) + \frac{\partial^i}{\partial x^i} k(x, y) = \tag{3}$$

$$= \int_y^x \frac{\partial^i \mathrm{K}(x, \xi)}{\partial x^i} k(\xi, y)\, d\xi + \sum_{s=0}^{i-0} \frac{\partial^s}{\partial x^s} (\mathrm{K}_{i-1-s,0}(x, x)\, k(x, y)),$$

dove l'espressione $\mathrm{K}_{i-1-s,0}(x, x)$ s'intende $\left[\frac{\partial^{i-1-s}}{\partial x^{i-1-s}} \mathrm{K}(x, y)\right]_{y=x}$. Per conseguenza se faremo sui due membri dell'equazione (A) l'operazione

$$\sum_{i=0}^{n} f_i(x) \frac{\partial^i}{\partial x^i} \tag{4}$$

troveremo che anche la $k(x, y)$ soddisferà ad un'equazione dello stesso tipo (4). I coefficienti si calcoleranno per mezzo delle funzioni $f_i(x)$, alla funzione $\mathrm{K}(x, y)$, e alle sue derivate. E dall'equazioni (5) si calcoleranno i valori, per $y = x$, della $k(x, y)$ e delle sue prime $n - 1$ derivate rispetto al primo argomento.

§ 3. — Il caso del cappio chiuso.

5. Si ottiene una grande semplificazione nel caso del cappio chiuso, cioè nel caso in cui il nucleo è funzione della sola differenza delle variabili. In questo caso, anche il nucleo dell'equazione risolvente è funzione della

sola differenza delle variabili. Infatti, partendo dalle formule:

$$-k(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\mathrm{K}_i(x,y),$$

$$\begin{cases}\mathrm{K}_i(x,y)=\mathrm{K}(x,y) & \text{per } i=1,\\ \mathrm{K}_i(x,y)=\int_y^x \mathrm{K}_{i-1}(x,\xi)\,\mathrm{K}(\xi,y)\,d\xi, & \text{per } i>1,\end{cases}$$

si vede subito che in questo caso la funzione associata è invariante per una trasformazione $x'=x+\mathrm{T}$, $y'=y+\mathrm{T}$, con T qualsiasi.

Per conseguenza, ponendo $a=0$ per semplicità, possiamo scrivere le equazioni:

$$u(x)=\varphi(x)+\int_0^x \mathrm{K}(x-\xi)\,u(\xi)\,d\xi \tag{1}$$

$$\mathrm{K}(x-y)+k(x-y)=\int_y^x \mathrm{K}(x-\xi)\,k(\xi-y)\,d\xi \tag{2}$$

$$u(x)=\varphi(x)-\int_0^x k(x-\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi\,. \tag{3}$$

Ponendo $y=0$ nell'equazione (2) si ha

$$\mathrm{K}(x)+k(x)=\int_0^x \mathrm{K}(x-\xi)\,k(\xi)\,d\xi\,. \tag{4}$$

Quindi $k(x)$ *è una soluzione dell'equazione* (1), *la quale si ottiene mettendo* $\varphi(x)=-\mathrm{K}(x)$.

6. Supponiamo che il nucleo, considerato come funzione di una sola variabile, sia soluzione di un'equazione differenziale, lineare, ordinaria, della quale i coefficienti sono delle costanti qualsiasi. Cioè supponiamo che si abbia

$$\sum_{i=0}^{n} a_i\,\frac{d^i\,\mathrm{K}(x)}{dx^i}=0\,. \tag{5}$$

Per mezzo della differenziazione, l'equazione (4) ci dimostra che le prime n derivate della $k(x)$ esistono e che anche la $k(x)$ è soluzione di un'equazione differenziale del tipo (5), però con altri coefficienti. Abbiamo, infatti, l'equazione

$$\sum_{i=0}^{n}(a_i-b_i)\,\frac{d^i\,k(x)}{dx^i}=0 \tag{6}$$

dove le b_i si danno per mezzo delle formule:

$$\begin{cases} b_i=\sum_{h=0}^{n-1-i} a_{i+1+h}\,\mathrm{K}^{(h)}(0)\,, & i=0,1,\dots,n-1,\\ b_n=0\,, & i=n\,.\end{cases} \tag{6'}$$

e le condizioni nel punto $x = 0$ si scrivono come segue:

$$(6'')\quad \begin{cases} k^{(i)}(0) = -\mathrm{K}^{(i)}(0) + \sum_{h=0}^{i=0} \mathrm{K}^{(h)}(0)\, k^{(i-1-h)}(0), & i = 1, 2, \ldots, n-1, \\ k(0) = -\mathrm{K}(0), & i = 0. \end{cases}$$

Qui con $\mathrm{K}^i(\alpha)$ e $k^{(i)}(\alpha)$ intendiamo $\left[\frac{d^i}{dx^i}\mathrm{K}(x)\right]_{x=\alpha}$ e $\left[\frac{d^i}{dx^i}k(x)\right]_{x=\alpha}$ rispettivamente. In virtù della (6) vediamo così che la ricerca del nucleo risolvente $k(x)$ è ricondotta alla risoluzione di un'equazione algebrica di grado n.

7. Come esempio prendiamo

$$(7)\qquad \mathrm{K}(x) = \mathrm{A}\cos x + \mathrm{B}\,\mathrm{sen}\, x.$$

L'equazione differenziale (5) diviene

$$\frac{d^2\,\mathrm{K}(x)}{dx^2} + \mathrm{K}(x) = 0$$

e per trovare la $k(x)$ si ha l'equazione

$$\frac{d^2\,k(x)}{dx^2} - \mathrm{A}\frac{d\,k(x)}{dx} + (1 - \mathrm{B})\,k(x) = 0$$

colle condizioni iniziali

$$k(0) = -\mathrm{A}$$
$$k'(0) = -\mathrm{B} - \mathrm{A}^2.$$

Quindi

$$(8)\qquad k(x) = \left(-\frac{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}}{\mathrm{C}} - \frac{\mathrm{A}}{2}\right) e^{\frac{x}{2}(-\mathrm{A}+\mathrm{C})} + \left(\frac{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}}{\mathrm{C}} - \frac{\mathrm{A}}{2}\right) e^{\frac{x}{2}(-\mathrm{A}-\mathrm{C})}$$

dove con C si denota il radicale $\sqrt{\mathrm{A}^2 + 4\mathrm{B} - 4}$.

Se $\mathrm{K}(x) = -\,\mathrm{sen}\, x$, abbiamo $\mathrm{A} = 0$, $\mathrm{B} = -1$, $\mathrm{C} = 2\sqrt{2}\,i$, e perciò

$$k(x) = \frac{\sqrt{2}}{4i}\, e^{\sqrt{2}\,ix} - \frac{\sqrt{2}}{4i}\, e^{-\sqrt{2}\,ix}$$

ossia

$$k(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{sen}\, x.$$

Se $\mathrm{K}(x) = +\,\mathrm{sen}\, x$, abbiamo $\mathrm{A} = 0$, $\mathrm{B} = +1$; e per conseguenza abbiamo l'equazione differenziale $\frac{d^2\,k(x)}{dx^2} = 0$, con le condizioni iniziali $k(0) = 0$, $k'(0) = 1$. Quindi

$$k(x) = x.$$

Se $K(x-y)=\int_y^x \operatorname{sen}(x-\xi)\operatorname{sen}(\xi-y)\,d\xi$, cioè se $K(x-y)=$ $=\frac{1}{2}[\operatorname{sen}(x-y)-(x-y)\cos(x-y)]$, abbiamo (vedi § 1)

$$k(x-y)=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_y^x (x-\xi)\operatorname{sen}\{\sqrt{2}(\xi-y)\}\,d\xi\,,$$

cioè

$$k(x-y)=\frac{1}{2}\left(x-y-\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}\{\sqrt{2}(x-y)\}\right).$$

8. Come secondo esempio prendiamo

$$K_0(x)=\alpha$$

dove α è costante. Si trova

$$k_0(x)=-\alpha e^{\alpha x}.$$

Quindi se

$$(9)\qquad K(x-y)=\int_y^x d\xi a\int_y^\xi d\xi' a\int_y^{\xi'}\cdots\int_y^{\xi^{(n-3)}} a^2\,d\xi^{(n-2)}$$
$$=\frac{a^n}{(n-1)!}(x-y)^{n-1}$$

si avrà (vedi § 1)

$$k(x-y)=(-a)^n\,\omega^{\frac{n(n+1)}{2}}\int_y^x d\xi\, e^{\omega a(x-\xi)}\int_y^\xi d\xi' e^{\omega^2 a(\xi-\xi')}\int_y^{\xi'}\cdots$$
$$\cdots\int_y^{\xi^{(n-3)}} e^{\omega^{n-1}a(\xi^{(n-3)}-\xi^{(n-2)})}e^{\omega^n a(\xi^{(n-2)}-y)}\,d\xi^{n-2};$$

ossia

$$(10)\qquad k(x)=-a^n\int_0^x d\xi\, e^{\omega a(x-\xi)}\int_0^\xi d\xi' e^{\omega^2 a(\xi-\xi')}\int_0^{\xi'}\cdots$$
$$\cdots\int_0^{\xi^{(n-3)}} e^{\omega^{n-1}a(\xi^{(n-3)}-\xi^{(n-2)})}e^{\omega^n a\xi^{(n-2)}}\,d\xi^{(n-2)}.$$

Per $n=2$ si ha

$$K(x)=\quad a^2(x-y)$$
$$k(x)=-\frac{a}{2}(e^{ax}-e^{-ax}).$$

Per $n=3$ si ha

$$K(x)=\quad\frac{a^3}{2!}(x-y)^2$$
$$k(x)=-\frac{a}{3}\left[e^{ax}-e^{-\frac{a}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}ax-\sqrt{3}\,e^{-\frac{a}{2}x}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}ax\right].$$

Per n qualsiasi le quadrature della (10) si calcolano facilmente, e così si ha:

$$(11) \qquad k(x) = -\frac{a}{n}\left(e^{ax} + \omega e^{\omega ax} + \omega^2 e^{\omega^2 ax} + \cdots + \omega^{n-1} e^{\omega^{n-1} ax}\right).$$

Questo risultato si può ottenere per mezzo del metodo del § 6. Siccome l'equazione (5) in questo caso è $d^n \mathrm{K}(x)/dx^n = 0$, la (6) diviene

$$d^n(x)/dx^n = k(x)$$

e le (6″) divengono

$$k(0) = k'(0) = \cdots = k^{(n-2)}(0) = 0, \text{ e } k^{(n-1)}(0) = -a^n.$$

Matematica. — *Sulle funzioni permutabili di seconda specie.* Nota II di Luigi Sinigallia, presentata dal Corrisp. G. Lauricella.

1. In una Nota precedente [1] ho mostrato come possono trovarsi tutte le funzioni permutabili con una funzione data, quando questa funzione è la somma di un numero finito di prodotti di una funzione della sola x per un'altra funzione della sola y, e quando è diverso da zero un certo determinante. Mi propongo ora di far vedere come possa risolversi lo stesso problema nel caso in cui l'ultima delle dette condizioni non è soddisfatta.

Sia dunque la funzione data $\mathrm{F}(x, y)$ espressa mediante il corrispondente sistema ortogonale completo $\varphi_r(x)$, $\psi_r(y)$; di guisa che

$$(1) \qquad \mathrm{F}(x, y) = \sum_{r=1}^{n} \frac{\varphi_r(x)\,\psi_r(y)}{\lambda_r}.$$

Poniamo

$$\mathrm{A}_{i,h} = \int_a^b \varphi_i(s)\,\psi_h(s)\,ds$$

e supponiamo che sia

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} \mathrm{A}_{11} & \cdots & \mathrm{A}_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \mathrm{A}_{n1} & \cdots & \mathrm{A}_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

[1] Sinigallia, *Sulle funzioni permutabili di seconda specie*, Rendiconti dell'Accademia dei Lincei, serie 5ª, vol. XX (1° sem., 1911).