ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVIII.

1911

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XX.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1911

Per n qualsiasi le quadrature della (10) si calcolano facilmente, e così si ha:

$$(11) \qquad k(x) = -\frac{a}{n}\left(e^{ax} + \omega e^{\omega ax} + \omega^2 e^{\omega^2 ax} + \cdots + \omega^{n-1} e^{\omega^{n-1} ax}\right).$$

Questo risultato si può ottenere per mezzo del metodo del § 6. Siccome l'equazione (5) in questo caso è $d^n \mathrm{K}(x)/dx^n = 0$, la (6) diviene

$$d^n(x)/dx^n = k(x)$$

e le (6″) divengono

$$k(0) = k'(0) = \cdots = k^{(n-2)}(0) = 0, \text{ e } k^{(n-1)}(0) = -a^n.$$

Matematica. — *Sulle funzioni permutabili di seconda specie.* Nota II di Luigi Sinigallia, presentata dal Corrisp. G. Lauricella.

1. In una Nota precedente [1] ho mostrato come possono trovarsi tutte le funzioni permutabili con una funzione data, quando questa funzione è la somma di un numero finito di prodotti di una funzione della sola x per un'altra funzione della sola y, e quando è diverso da zero un certo determinante. Mi propongo ora di far vedere come possa risolversi lo stesso problema nel caso in cui l'ultima delle dette condizioni non è soddisfatta.

Sia dunque la funzione data $\mathrm{F}(x, y)$ espressa mediante il corrispondente sistema ortogonale completo $\varphi_r(x), \psi_r(y)$; di guisa che

$$(1) \qquad \mathrm{F}(x, y) = \sum_{r=1}^{n} \frac{\varphi_r(x)\, \psi_r(y)}{\lambda_r}.$$

Poniamo

$$\mathrm{A}_{i,h} = \int_a^b \varphi_i(s)\, \psi_h(s)\, ds$$

e supponiamo che sia

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} \mathrm{A}_{11} & \ldots & \mathrm{A}_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \mathrm{A}_{n1} & \ldots & \mathrm{A}_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

[1] Sinigallia, *Sulle funzioni permutabili di seconda specie*, Rendiconti dell'Accademia dei Lincei, serie 5ª, vol. XX (1° sem., 1911).

senza che siano contemporaneamente nulle tutte le $A_{i,h}$ con $i \neq h$. Tale caso si presenta per esempio quando essendo $n = 2$,

$$\int_a^b \varphi_1^2(s)\, ds = \int_a^b \varphi_2^2(s)\, ds = \int_a^b \psi_1^2(s)\, ds = 1$$

$$\int_a^b \varphi_1(s)\, \varphi_2(s)\, ds = 0\,,$$

ed $A_{11}^2 + A_{21}^2$ essendo diverso da zero e da 1, si ha

$$\psi_2(x) = \mu \left\{ A_{11}\, \varphi_1(x) + A_{21}\, \varphi_2(x) - (A_{11}^2 + A_{21}^2)\, \psi_1(x) \right\}$$

ove

$$\frac{1}{\mu^2} = (A_{11}^2 + A_{21}^2)\,(1 - A_{11}^2 - A_{21}^2):$$

perchè allora

$$\int_a^b \psi_2^2(s)\, ds = 1 \quad ; \quad \int_a^b \psi_1(s)\, \psi_2(s)\, ds = 0$$

$$A_{12} = \mu(1 - A_{11}^2 - A_{21}^2)\, A_{11} \quad ; \quad A_{22} = \mu(1 - A_{11}^2 - A_{21}^2)\, A_{21}$$

e quindi $D = 0$.

Ora se $q (< n)$ è la caratteristica del determinante D, esisterà in D almeno un determinante di ordine q, e che potremo supporre contenuto nelle prime q colonne, il quale sarà diverso da zero. Avremo cioè

$$D_q \equiv \begin{vmatrix} A_{i_1 1} & \dots & A_{i_1 q} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ A_{i_q 1} & \dots & A_{i_q q} \end{vmatrix} \neq 0$$

e quindi

$$(2) \qquad A_{i,q+h} = \sum_{r=1}^{q} \mu_{h,r}\, A_{i,r} \qquad (i = 1\,, \dots n\ ;\ h = 1\,, \dots n - q)\,.$$

Posto ciò se

$$(3) \qquad \int_a^b F(x\,, s)\, K(s\,, y)\, ds = \int_a^b K(x\,, s)\, F(s\,, y)\, ds = g(x\,, y)$$

si avrà ancora

$$g(x\,, y) = \sum_{i,h=1}^{n} a_{i,h}\, \varphi_i(x)\, \psi_h(y)\,,$$

ove le $a_{i,h}$ sono costanti che devono soddisfare le n^2 relazioni

$$\lambda_i \sum_{r=1}^{n} A_{h,r}\, a_{i,r} - \lambda_h \sum_{r=1}^{n} A_{r,i}\, a_{r,h} = 0 \qquad (i\,, h = 1\,, \dots n)\,.$$

Perciò se poniamo

$$p_{i,h} = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda_i} & \text{se } i = h \\ 0 & \text{se } i \neq h \end{cases} ; \quad \mathrm{B}_{i,h,s} = \sum_{r \neq i,h} \frac{1}{\lambda_{r_1} \dots \lambda_{r_s}} \begin{vmatrix} \mathrm{A}_{hi} & \mathrm{A}_{hr_1} & \dots & \mathrm{A}_{hr_s} \\ \mathrm{A}_{r_1 i} & \mathrm{A}_{r_1 r_1} & \dots & \mathrm{A}_{r_1 r_s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathrm{A}_{r_s i} & \mathrm{A}_{r_s r_1} & \dots & \mathrm{A}_{r_s r_s} \end{vmatrix}$$

ove il sommatorio $\sum\limits_{r \neq i,h}$ va esteso a tutte le $\binom{n-2}{s}$ combinazioni della classe s degli indici $1, 2, \dots i-1, i+1, \dots h-1, h+1, \dots n$, avremo [1]

$$(4) \qquad a_{i,h} = p_{i,h}\, c_0 + \frac{1}{\lambda_i \lambda_h} \sum_{s=0}^{q-1} \mathrm{B}_{i,h,s}\, c_{s+1} \qquad (i, h = 1, \dots n)$$

essendo le $c_0\, c_1 \dots c_q$ delle costanti arbitrarie.

2. Notiamo subito che preso un sistema di valori delle $a_{i,h}$ che soddisfanno alle (4), se $\mathrm{K}_0(x, y)$ è una soluzione particolare della (3) e se

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) = \alpha(x, y) - \sum_{r=1}^{n} \varphi_r(y) \int_a^b \alpha(x, t)\, \varphi_r(t)\, dt \, - \\ - \sum_{r=1}^{n} \psi_r(x) \int_a^b \psi_r(s)\, \alpha(s, y)\, ds \, + \\ + \sum_{i,h=1}^{n} \varphi_i(y)\, \psi_h(x) \int_a^b \psi_h(s)\, ds \int_a^b \alpha(s, t)\, \varphi_i(t)\, dt \,, \end{aligned}$$

ove la $\alpha(x, y)$ è una funzione arbitraria integrabile nel campo (a, b), la soluzione generale della (3) sarà $\mathrm{K}_0(x, y) + \Phi(x, y)$.

Ancora se

$$h(x, y) = \sum_{i,h=1}^{n} a'_{i,h}\, \varphi_i(x)\, \psi_h(y)$$

ove

$$(5) \qquad a'_{i,h} = \frac{1}{\lambda_i \lambda_h} \sum_{s=0}^{q-1} \mathrm{B}_{i,h,s}\, c_{s+1} \,,$$

e se $\mathrm{H}(x, y)$, $\mathrm{G}(x, y)$ sono rispettivamente due soluzioni particolari delle equazioni

$$(6) \qquad \int_a^b \mathrm{F}(x, s)\, \mathrm{H}(s, y)\, ds = \int_a^b \mathrm{H}(x, s)\, \mathrm{F}(s, y)\, ds = h(x, y)$$

$$(7) \qquad \int_a^b \mathrm{F}(x, s)\, \mathrm{G}(s, y)\, ds = \int_a^b \mathrm{G}(x, s)\, \mathrm{H}(s, y)\, ds = \mathrm{F}(x, y)$$

[1] V. formola a pag. 568, loc. cit.

per le formule precedenti $c_0\,G(x,y)+H(x,y)$ sarà una soluzione particolare della (3) e quindi la soluzione generale della (3) stessa sarà

$$K(x,y)=c_0\,G(x,y)+H(x,y)+\Phi(x,y).$$

Perciò il nostro problema è così ridotto alla ricerca delle soluzioni particolari $H(x,y)$, $G(x,y)$.

3. A tale scopo preso un sistema di valori $a'_{i,h}$ che soddisfanno alle (5) cerchiamo di determinare le costanti $b_{i,h}$ in modo che la funzione

$$H(x,y)=\sum_{i,h=1}^{n} b_{i,h}\,\varphi_i(x)\,\psi_h(y)$$

soddisfi all'equazione

$$\int_a^b F(x,s)\,H(s,y)\,ds=h(x,y).$$

Perciò dovrà aversi

$$\sum_{r=1}^{n} A_{r,i}\,b_{r,h}=\lambda_i\,a'_{i,h} \qquad (i=1,\dots n). \tag{8}$$

È facile convincersi della compatibilità delle equazioni (8): infatti dalle (8) per le (2) si ha

$$\lambda_{q+i}\,a'_{q+i,h}=\sum_{r=1}^{q}\mu_{i,r}\sum_{s=1}^{n}A_{s,r}\,b_{s,h}$$

ossia

$$\lambda_{q+i}\,a'_{q+i,h}=\sum_{r=1}^{q}\mu_{i,r}\,\lambda_r\,a'_{r,h} \qquad (i=1,\dots n-q\,,\ h=1,\dots n) \tag{9}$$

e poichè per le (2)

$$B_{q+i,h,s}=\sum_{r=1}^{q}\mu_{i,r}\,B_{r,h,s}$$

le espressioni $\frac{1}{\lambda_i\,\lambda_h}B_{i,h,s}$ e quindi anche le $a'_{i,h}$ soddisfanno alle (9). Dalle equazioni

$$A_{i_1 h}\,b_{i_1 k}+\cdots+A_{i_q h}\,b_{i_q k}=\lambda_h\,a_{hk}-\sum_{j\neq i_1\cdots i_q}A_{jh}\,b_{jk}$$
$$(h=1,\dots q\ ;\ k=1,\dots n)$$

se $P_{i_r h}$ è il complemento algebrico di $A_{i_r h}$ nel determinante D_q, deduciamo perciò

$$b_{i_r k}=\frac{1}{D_q}\sum_{s=4}^{q}P_{i_r s}\left(\lambda_s\,a_{s,k}-\sum_{j\neq i_1\cdots i_q}A_{j,s}\,b_{jk}\right) \tag{10}$$
$$(r=1,\dots q\ ;\ k=1,\dots n).$$

Questi valori delle $b_{i_r k}\,(r = 1\,,\dots q\ ;\ k = 1\,,\dots n)$ soddisferanno alle (8) qualunque sia il sistema di valori delle $b_{j,k}\,(j \neq i_1 \dots i_q\ ,\ k = 1\,,\dots n)$.

Tra tutti questi sistemi di valori delle $b_{i,h}$ cerchiamo di determinare quelli pei quali la $\mathrm{H}(x\,,y)$ è permutabile colla $\mathrm{F}(x\,,y)$: dovrà allora aversi

$$\int_a^b \mathrm{H}(x\,,s)\,\mathrm{F}(s\,,y)\,ds = h(x\,,y)$$

e quindi

$$\sum_{\tau=1}^{n} \mathrm{A}_{h,\tau}\, b_{i,\tau} = \lambda_h\, a'_{i,h} \qquad (i\,,h = 1\,,\dots n). \tag{11}$$

In modo analogo a quello precedentemente può dimostrarsi la compatibilità delle equazioni (11). Perciò affinchè la nostra funzione $\mathrm{H}(x\,,y)$ soddisfi alla (6) bisogna che le $b_{j,k}\ (j \neq i_1 \dots i_q\ ;\ k = 1\,,\dots n)$ che figurano come arbitrarie nelle (10) soddisfino alle equazioni

$$\mathrm{A}_{i_r 1}\, b_{j1} + \cdots + \mathrm{A}_{i_r q}\, b_{jq} = \lambda_{i_r}\, a'_{ji_r} - \sum_{\tau=1}^{n-q} \mathrm{A}_{i_r q+\tau}\, b_{j,q+\tau}$$

$$(r = 1\,,\dots q)$$

e quindi per le (2)

$$b_{j,k} = \frac{1}{\mathrm{D}_q} \sum_{s=1}^{q} \mathrm{P}_{i_s k}\, \lambda_{i_s}\, a'_{ji_s} - \sum_{\tau=1}^{n-p} \mu_{\tau,k}\, b_{j,q+\tau} \tag{12}$$

$$(j \neq i_1 \dots i_q\ ;\ k = 1 \dots q).$$

È facile ora verificare che prendendo ad arbitrio le $b_{j,q+\tau}\ (j \neq i_1 \dots i_q\ ,\ \tau = 1\,,\dots n - q)$ e calcolando le altre $b_{i,h}$ colle (10), (12) tutte le (11) saranno soddisfatte. Perciò la funzione $\mathrm{H}(x\,,y)$ soddisferà alla (16) quando si prenda

$$(13)\quad \left\{ \begin{aligned} & b_{i_r k} = \frac{1}{\mathrm{D}_q} \sum_{s=1}^{q} \mathrm{P}_{i_r s}\, \lambda_s\, a'_{sk} - \frac{1}{\mathrm{D}_q^2} \sum_{i=1}^{q} \mathrm{P}_{i_r s} \sum_{j \neq i_1 \cdots i_q} \mathrm{A}_{js} \sum_{\sigma=1}^{q} \mathrm{P}_{i_\sigma k}\, \lambda_{i_\sigma}\, a'_{ji_\sigma} \\ & \qquad\qquad (r\,,k = 1\,,\dots q) \\ & b_{i_r q+h} = \frac{1}{\mathrm{D}_q} \sum_{s=1}^{q} \mathrm{P}_{i_r s}\, \lambda_s\, a'_{s,q+h} \qquad (r = 1\,,\dots q\ ;\ h = 1\,,\dots n - q) \\ & b_{j,k} = \frac{1}{\mathrm{D}_q} \sum_{s=1}^{q} \mathrm{P}_{i_s k}\, \lambda_{i_s}\, a'_{ji_s} \qquad (j \neq i_1 \dots i_q\ ;\ k = 1 \dots q) \\ & b_{j,q+h} = 0 \qquad (j \neq i_1 \dots i_q\ ;\ h = 1\,,\dots n - q) \end{aligned} \right.$$

4. Passiamo ora a trovare una soluzione particolare della (7): soluzione che non potrà, nel caso che consideriamo, avere la forma della $H(x, y)$ ora determinata. Però raggiungeremo facilmente il nostro scopo osservando che la funzione più generale che soddisfa all'equazione

$$\int_a^b F(x, s)\, G_1(s, y)\, ds = F(x, y)$$

è data da

$$G_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i(x)\, \psi_i(y) + \omega(x, y) - \sum_{i=1}^{n} \psi_i(x) \int_a^b \psi_i(s)\, \omega(s, y)\, ds\,,$$

mentre la soluzione generale dell'equazione

$$\int_a^b G_2(x, s)\, F(s, y)\, ds = F(x, y)$$

è

$$G_2(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x)\, \varphi_i(y) + \theta(x, y) - \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(y) \int_a^b \theta(x, t)\, \varphi_i(t)\, dt$$

ove le $\omega(x, y)$, $\theta(x, y)$ sono due funzioni arbitrarie integrabili nel campo (a, b).

Si vede subito che prendendo

$$\omega(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x)\, \varphi_i(y) \quad ; \quad \theta(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i(x)\, \psi_i(y)$$

si ha $G_1(x, y) = G_2(x, y)$ e quindi

$$G(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \{\varphi_i(x)\, \varphi_i(y) + \psi_i(x)\, \psi_i(y)\} - \sum_{i,h=1}^{n} A_{i,h}\, \varphi_i(y)\, \psi_h(x)$$

è una soluzione della (7).

Determinate così le $H(x, y)$, $G(x, y)$ il problema proposto rimane completamente risoluto.