ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVIII.

1911

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XX.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1911

Matematica. — *Sulle condizioni sufficienti per il minimo nel calcolo delle variazioni. (Gli integrali sotto forma non parametrica).* Nota II di EUGENIO ELIA LEVI, presentata dal Socio L. BIANCHI.

4. Nel teorema dimostrato nella Nota precedente [1] si impose all'inclinazione delle curve variate $\mathfrak{C}$ di soddisfare ad una disuguaglianza della forma $|y'-\mathring{y}'|\leq r'$. Ciò è naturale: perchè è ben noto per un'osservazione del Bolza che solo in questa ipotesi è possibile, per il problema in forma non parametrica, ridurre le condizioni di minimo a condizioni relative al solo estremale $\mathring{\mathfrak{C}}$, quali sono quelle del teorema del n. 2. Quando si voglia trattare il problema senza imporre una limitazione di tale tipo, generalmente si enuncia che condizione sufficiente per il minimo è che, oltre alle solite condizioni di Legendre e di Jacobi, esista un campo attorno all'estremale $\mathring{\mathfrak{C}}$ tale che, detta $\pi(xy)$ l'inclinazione [2] del campo nel punto (xy), sia $\mathcal{E}(xy\,;\pi(xy)y')>0$ per $|y'-\pi(xy)|\neq 0$. Volendo noi escludere dai nostri ragionamenti il concetto di campo non potremo naturalmente dimostrare un tale enunciato, nel quale entra esplicitamente questo concetto medesimo. Dimostreremo invece il teorema seguente:

Se $\mathring{\mathfrak{C}}$ è tale che, indicando con r_1 un numero convenientemente piccolo, si abbia che:

1° (2) $\quad R>0$,

2° $(3)^{bis}$ $\quad \mathcal{E}(xy\,;\mathring{y}'y')>0$ *per* $|y-\mathring{y}(x)|\leq r_1 \qquad y'\neq\mathring{y}'$,

3° *il punto x_1' coniugato di x_1 su $\mathring{\mathfrak{C}}$ segue x_2,*

si può trovare un $r\leq r_1$ tale che $\mathring{\mathfrak{C}}$ dia ad I *il valore minimo rispetto alle curve $\mathfrak{C}$ per cui è $|y(x)-\mathring{y}(x)|<r$ e che congiungono* P_1 *e* P_2.

Prima di dimostrare questo teorema, confrontiamolo coll'ordinario teorema sopra rammentato. Intanto esso non è punto equivalente a questo, perchè per quanto, fissato un campo ed un numero σ convenientemente piccolo, sia sempre possibile prendere un intorno tanto piccolo di $\mathring{\mathfrak{C}}$ che in esso sia $|\pi(xy)-\mathring{y}'(x)|<\sigma$, tuttavia quando y' varia da $-\infty$ a $+\infty$ non si può dalla condizione $\mathcal{E}(xy\,;\mathring{y}'y')>0$ dedurre la $\mathcal{E}(xy\,;\pi(xy)\,y')>0$, nè

[1] Questi Rendiconti, pag. 425. Nella presente Nota per maggiore comodità la numerazione dei § e delle formule continua quella della Nota precedente.

[2] Cioè, se $y=Y(x)$ è l'equazione dell'estremale del campo che passa per il punto xy, si ponga $\pi(xy)=Y'(x)$: i tedeschi chiamano tale funzione Gefällsfunktion.

viceversa. Esso esprime quindi una nuova condizione sufficiente per il minimo: ed anzi a me pare che il *nuovo criterio* che viene pertanto da noi enunciato, presenti qualche vantaggio *pratico*, in quanto per applicarlo non occorre il calcolo della funzione $\pi(xy)$ per i punti che non appartengano all'estremale che si studia [1].

Non mancheremo di notare del resto che evidentemente *sia il criterio ordinario, che questo nostro sono certo soddisfatti se il problema è regolare, e cioè se è* $f''_{y'^2}(xyy') > 0$ *qualunque sia* y'.

5. Per dimostrare questo nuovo teorema non si può senz'altro seguire il ragionamento che usammo nel n. 3. Perchè è vero che le condizioni (2) $(3)^{bis}$ si possono ancora scrivere dicendo che è soddisfatta la (13) qualunque sia y': ma ciò non basta, perchè il numero $M_{\rho'}$ che compare in (23) nel formare la limitazione per λ_4, può crescere oltre ogni limite col crescere di ρ': e con esso crescerà H.

Per superare tale difficoltà fissiamo un numero r' arbitrario; e presa una qualunque curva $\mathfrak{C}$ chiamiamo χ l'insieme di punti di $(x_1\, x_2)$ in cui è $|\eta'| < r'$, χ_1 l'insieme complementare in cui $|\eta'| \geq r'$. È noto che potremo parlare — almeno quando gli integrali si prendano nel senso di Lebesgue — di integrali estesi ai campi χ e χ_1.

Riprendiamo, ciò posto, la formula (8) e trasformiamola subito col fare la posizione (16): avremo aggiungendo e togliendo $\frac{1}{2}\mathrm{R}\eta'^2$, colla solita trasformazione di Jacobi:

$$\Delta \mathrm{I} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\mathcal{E}(xy\,;\mathring{y}'y') - \frac{1}{2}\mathrm{R}(u'^2 p^2 + 2\eta u' p') \right] dx + \tag{26}$$
$$+ \int_{x_1}^{x_2} (\lambda_1 \eta^3 + \lambda_2 \eta^2 \eta')\, dx\,.$$

Spezziamo il primo di questi integrali in due parti, l'uno esteso a χ, e l'altro a χ_1: per quanto riguarda il primo scriveremo procedendo come al n. 3 e mantenendo quelle stesse notazioni,

$$\int_\chi \left[\mathcal{E}(xy\,;\mathring{y}'y') - \frac{1}{2}\mathrm{R}(u'^2 p^2 + 2\eta u' p') \right] dx =$$
$$= \int_\chi \left[\frac{1}{2}\mathrm{R} + \lambda_3 \eta + \lambda_4 \eta' \right] u^2 p'^2\, dx + \int_\chi (\lambda_3 \eta + \lambda_4 \eta')\,(u'^2 p^2 + 2\eta u' p')\, dx \tag{27}$$

[1] Nel caso degli integrali sotto forma parametrica che studieremo nelle prossime Note troveremo una più perfetta uniformità coi risultati dell'ordinaria teoria.

Per quanto riguarda invece il secondo scriveremo

$$(28)\quad \begin{aligned} &\int_{\chi_1}\left[\mathcal{E}(xy\,;\mathring{y}'y')-\frac{1}{2}\,\mathrm{R}(u'^2p^2+2\eta u'p')\right]dx= \\ &\int_{\chi_1}\frac{\mu}{2}\,u^2p'^2\,dx+\int_{\chi_1}\left[\mathcal{E}(xy\,;\mathring{y}'y')-\frac{\mu}{2}\,u^2p'^2-\frac{1}{2}\,\mathrm{R}(u'^2p^2+2\eta u'p')\right]dx\,. \end{aligned}$$

Od infine se poniamo

$$(29)\quad \begin{aligned} &\Lambda_3=\lambda_3 \quad \Lambda_4=\lambda_4 \qquad \mathrm{E}_1=\frac{1}{2}\,\mathrm{R}+\lambda_3\eta+\lambda_4\eta' \quad \text{in } \chi \\ &\Lambda_3=0 \quad \Lambda_4=0 \qquad \mathrm{E}_1=\frac{\mu}{2} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{in } \chi_1 \end{aligned}$$

potremo, sostituendo (27) (28) in (26), scrivere

$$(30)\quad \begin{aligned} \Delta\mathrm{I}=&\int_{x_1}^{x_2}\mathrm{E}_1u^2p'^2\,dx+ \\ &+\int_{x_1}^{x_2}\left[\lambda_1\eta^3+\lambda_2\eta^2\eta'+(\Lambda_3\eta+\Lambda_4\eta')(u'^2p^2+2\eta u'p')\right]dx+ \\ &+\int_{\chi_1}\left[\mathcal{E}(xy\,;\mathring{y}'y')-\frac{\mu}{2}\,\eta'^2+\left(\frac{\mu}{2}-\frac{1}{2}\,\mathrm{R}\right)(u'^2p^2+2\eta u'p')\right]dx\,. \end{aligned}$$

Quanto ai primi due integrali si tratteranno come quelli del n. 3. Infatti per (29) si avrà sempre $\mathrm{E}_1>\frac{\mu}{2}$, mentre per il secondo integrale ove, come precedentemente, si supponga $|\eta|\leq r$ varanno ancora limitazioni della forma (21), (22), (23), perchè Λ_4 è nulla tranne che in χ dove è uguale a λ_4 e dove appunto è $|\eta'|\leq r'$, e $|y'|\leq\varrho_1'+r'$.

Quindi avremo, analogamente a (24):

$$(31)\quad \begin{aligned} &\int_{x_1}^{x_2}\{\mathrm{E}_1u^2p'^2+\lambda_1\eta^3+\lambda_2\eta^2\eta'+(\Lambda_3\eta+\Lambda_4\eta).(u'^2p^2+2\eta u'p')\}\,dx> \\ &\qquad\qquad >\left(\frac{\mu}{2}\,m_1^2-r\mathrm{H}\right)\int_{x_1}^{x_2}p'^2\,dx\,. \end{aligned}$$

Per quanto riguarda l'ultimo integrale di (30) osserveremo che per (13)

$$\mathcal{E}(xy\,;\mathring{y}'y')-\frac{\mu}{2}\,\eta'^2\geq\frac{\mu}{2}\,\eta'^2\,;$$

e che, se supponiamo $\mathrm{R}<\mathrm{M}$ $(\geq\mu)$, è

$$\begin{aligned} \left|\left(\frac{\mu}{2}-\frac{1}{2}\,\mathrm{R}\right)(u'^2p^2+2\eta u'p')\right|&=\left|\frac{\mu}{2}-\frac{\mathrm{R}}{2}\right||2p\eta'u'-u'^2p^2|\leq \\ &\leq\frac{1}{2}(\mathrm{M}-\mu)\,\frac{r}{m_1}\,m_3\left(2|\eta'|+\frac{rm_3}{m_1}\right). \end{aligned}$$

Onde segue

$$(32)\qquad \begin{aligned} &\mathcal{E}(xy\,;\mathring{y}'y') - \frac{\mu}{2}\eta'^2 + \frac{1}{2}(\mu - \mathrm{R})\,(u'^2p^2 + 2\eta u'p') \geq \\ &\qquad\qquad \geq \frac{\mu}{2}\eta'^2 - \alpha r\,|\eta'| - \beta r^2 \end{aligned}$$

dove

$$\alpha = (\mathrm{M} - \mu)\frac{m_3}{m_1} \qquad \beta = \frac{1}{2}(\mathrm{M} - \mu)\frac{m_3^2}{m_1^2}$$

sono due costanti positive. Ma ricordiamo che in χ_1 è $|\eta'| \geq r'$, ne segue che, se

$$(33)\qquad r \leq \frac{\mu r'}{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 2\beta\mu}}\,,$$

l'integrando del secondo integrale di (30) è essenzialmente positivo.

Vale quindi ancora una formula analoga a (24)

$$(34)\qquad \Delta\mathrm{I} > \left(\frac{\mu}{2}m_1^2 - r\mathrm{H}\right)\int_{x_1}^{x_2} p'^2\,dx$$

e quindi se oltre a (33) è pure $r < \frac{m_1^2\mu}{2\mathrm{H}}$ è $\Delta\mathrm{I} \geq 0$ c. v. d.

Osservazione. — Le formule (24) e (34) sono entrambe capaci di dimostrare anche qualcosa di più: e precisamente di dimostrare il teorema di Osgood: invero se per un conveniente valore x è $|\eta(c)| = |y(c) - \mathring{y}(c)| = \alpha$ avremo

$$\int_{x_1}^{x_2} p'^2(x)\,dx \geq \int_{x_1}^{c} p'^2(x)\,dx \geq \frac{p^2(c)}{c - x_1} \geq \frac{\eta^2(c)}{(c - x_1)\,u^2} \geq \frac{\alpha^2}{(c - x_1)\,m_1^2}\,;$$

onde segue che $\Delta\mathrm{I}$ diviene infinitesima di ordine minore o uguale al secondo rispetto al valore che η prende per un qualunque valore prefissato c di x [1].

[1] Cfr. Hadamard, loc. cit., pag. 479; Osgood, Trans. of the American Math. Society, tomo III (1901).