ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVIII.

1911

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XX.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1911

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 19 novembre 1911.

F. D'Ovidio Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle condizioni sufficienti per il minimo nel calcolo delle variazioni (Gli integrali in forma parametrica).* Nota III di Eugenio Elia Levi, presentata dal Socio L. Bianchi.

1. Nelle Note I e II (¹) ho dato una dimostrazione della sufficienza delle condizioni per il minimo degli integrali semplici posti sotto forma non parametrica in cui non faccio uso del concetto di campo. Nella presente Nota ed in un'altra che seguirà tratto della stessa questione per gli integrali posti in forma parametrica; pur mantenendo lo stesso concetto direttivo, si debbono perciò introdurre nei ragionamenti non irrilevanti modificazioni di dettaglio.

Si avrà dunque da trovare quando una curva, che passa per due punti estremi assegnati P_1 e P_2, rende minimo l'integrale

$$I = \int_{t_1}^{t_2} F(xy\,;\,x'y')\,dt\,. \tag{1}$$

Supporremo perciò, secondo l'uso, F positivamente omogenea di primo grado rispetto a $x'y'$ e di classe C'''; con $F_1(xy\,;\,x'y')$, $F_2(xy\,;\,x'y')$ indicheremo le funzioni che così si indicano ordinariamente e che sono formate rispettivamente, colle derivate seconde e colle seconde e terze di F; infine indicheremo con M il massimo valore assoluto di F e delle sue derivate

(¹) Questi Rendiconti, pag. 425 e pag. 466.

dei primi 3 ordini, di F_1 e delle sue derivate prime, di F_2 quando xy resta in un certo campo $\mathfrak{R}$, ed $x'y'$ sono tali che $x'^2 + y'^2 = 1$ (¹).

Dimostreremo che, *se la curva* $\overset{\circ}{\mathfrak{C}}$ *che riferita all'arco ha le equazioni*

$$x = \overset{\circ}{x}(s) \quad , \quad y = \overset{\circ}{y}(s) , \tag{2}$$

è priva di punti multipli, passa per i due punti $P_1 \equiv (x_1 y_1)$, $P_2 \equiv (x_2 y_2)$, *sta in* $\mathfrak{R}$, *è un estremale per l'integrale* (1), *ed infine soddisfa alle condizioni seguenti*:

1°) $F_1(\overset{\circ}{x}\overset{\circ}{y} ; \overset{\circ}{x}'\overset{\circ}{y}') \geq \mu > 0$

2°) $\mathcal{E}(\overset{\circ}{x}\overset{\circ}{y} ; \overset{\circ}{x}'\overset{\circ}{y}' ; x'y') > 0$ *quando non sia* $1 - \dfrac{\overset{\circ}{x}'x' + \overset{\circ}{y}'y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = 0$

3°) *il punto* $x_1'y_1'$ *coniugato su* $\overset{\circ}{\mathfrak{C}}$ *di* $x_1 y_1$ *segue* $x_2 y_2$,

la curva $\overset{\circ}{\mathfrak{C}}$ *dà ad* I *il valore minimo rispetto a tutte le curve che passano per* P_1 *e* P_2 *e giacciono in un conveniente intorno di* $\overset{\circ}{\mathfrak{C}}$.

2. Ci occorre anzitutto indicare un modo conveniente di fissare il parametro sulle curve variate di guisa che risulti comodo il confronto dei valori di I per esse e per $\overset{\circ}{\mathfrak{C}}$. Osserveremo anzitutto che dalle ipotesi fatte per $\overset{\circ}{\mathfrak{C}}$ segue che la curvatura di $\overset{\circ}{\mathfrak{C}}$ è finita: la indicheremo con k e chiameremo $\varkappa$ il suo massimo valore: sarà $\varkappa \leq \dfrac{2M}{\mu}$ (²). Avremo

$$\begin{gathered} \overset{\circ}{x}'^2 + \overset{\circ}{y}'^2 = 1 \; ; \; \overset{\circ}{x}'\overset{\circ}{x}'' + \overset{\circ}{y}'\overset{\circ}{y}'' = 0 \; ; \\ \overset{\circ}{x}'' = -k\overset{\circ}{y}' \, , \, \overset{\circ}{y}'' = k\overset{\circ}{x}' \; ; \sqrt{\overset{\circ}{x}''^2 + \overset{\circ}{y}''^2} = k . \end{gathered} \tag{3}$$

Indicheremo con $\overset{\circ}{P}(s)$ il punto $\overset{\circ}{\mathfrak{C}}$ di parametro s, e conteremo l'arco a partire P_1: sarà, indicando con σ la lunghezza di $\overset{\circ}{\mathfrak{C}}$, $\overset{\circ}{P}(0) = P_1$, $\overset{\circ}{P}(\sigma) = P_2$.

Alle curve variate $\mathfrak{C}$ imporremo di restare in quella parte $\mathfrak{R}_1$ di $\mathfrak{R}$ che soddisfa alla condizione che per ogni punto P di essa passa una ed una sola normale a $\overset{\circ}{\mathfrak{C}}$: poichè $\overset{\circ}{\mathfrak{C}}$ non ha punti multipli per costruire $\mathfrak{R}_1$ basta staccare sulle normali a $\overset{\circ}{\mathfrak{C}}$ da entrambe le parti a partire da $\overset{\circ}{\mathfrak{C}}$ un segmento $< \dfrac{1}{\varkappa}$. Presa poi una qualunque curva $\mathfrak{C}$ di $\mathfrak{R}_1$ passante per P_1 e

(¹) Sono queste le notazioni e le ipotesi di cui fa uso il Bolza nel suo trattato già citato.

(²) Invero l'equazione degli estremali si può scrivere $k = \dfrac{F''_{y'x} - F''_{x'y}}{F_1}$. Cfr. Bolza, loc. cit., pag. 203, formula (23).

P_2, chiameremo t l'arco su di essa contato a partire da P_1: e, conforme ad una osservazione già fatta in una Nota precedente, supporremo senz'altro che, scritte le equazioni di $\mathfrak{C}$ nella forma

$$x = x(t) \quad , \quad y = y(t) , \tag{4}$$

queste funzioni siano di classe C''. Indicheremo con $P(t)$ il punto di $\mathfrak{C}$ di parametro t; sarà, indicando con $\mathfrak{T}$ la lunghezza di $\mathfrak{C}$, $P(0) = P_1$, $P(\tau) = P_2$. Dalle ipotesi fatte sopra segue che per ogni punto $P(t)$ di $\mathfrak{C}$ potremo condurre una ed una sola normale a $\overset{\circ}{\mathfrak{C}}$: sia $s(t)$ il valore del parametro s corrispondente a tale normale. Fissato sulle normali a $\overset{\circ}{\mathfrak{C}}$ il verso positivo nel modo usuale, indichiamo con $\omega(t)$ il segmento $\overset{\circ}{P}(s(t))\,P(t)$ preso col suo segno: potremo scrivere le equazioni (4) nella forma

$$\begin{aligned} x &= \mathring{x}(s(t)) + \omega(t)\,\mathring{y}'(s(t)) \\ y &= \mathring{y}(s(t)) - \omega(t)\,\mathring{x}'(s(t)) \end{aligned} \qquad (\omega(0) = \omega(\tau) = 0). \tag{5}$$

Avremo allora

$$\begin{aligned} x' &= \mathring{x}'s' + \omega'\mathring{y}' + \omega\mathring{y}''s' = \mathring{x}' + \mathring{x}'\,[(1 + k\omega)\,s' - 1] + \omega'\mathring{y}' , \\ y' &= \mathring{y}'s' - \omega'\mathring{x}' - \omega\mathring{x}''s' = \mathring{y}' + \mathring{y}'\,[(1 + k\omega)\,s' - 1] - \omega'\mathring{x}' . \end{aligned} \tag{6}$$

E poichè t è l'arco di $\mathfrak{C}$ trarremo

$$1 = \omega'^2 + s'^2(1 + k\omega)^2, \tag{7}$$

onde in particolare

$$|\omega'| < 1 \quad , \quad |(1 + k\omega)\,s'| < 1 . \tag{8}$$

Indicando con r un'indeterminata, supporremo d'ora in poi $|\omega| \leq r$. Per quanto precede dovrà intanto essere $r < \frac{1}{\varkappa}$. Supporremo per semplicità $r < 1$, $r < \frac{1}{2\varkappa}$: segue intanto allora da (8):

$$|s'| < 2 . \tag{8bis}$$

Ed il teorema da noi enunciato consisterà nel mostrare che si può prendere r tanto piccolo che le curve (5) per cui $|\omega| \leq r$ diano ad I un valore maggiore di quello di $\overset{\circ}{\mathfrak{C}}$.

3. Prima di dimostrare il nostro teorema occorre ancora trovare una conveniente espressione per la funzione $\mathcal{E}$ di Weierstrass. Serberemo le notazioni del n°. precedente: noteremo inoltre esplicitamente che ove compare una funzione di s si deve immaginare in essa posto $s = s(t)$.

Si osservi che è

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}(xy\,;\mathring{x}'\mathring{y}'\,;x'y') &= \mathrm{F}(xy\,;x'y') - \mathrm{F}(xy\,;\mathring{x}'\mathring{y}') - \\
&\quad - (x'-\mathring{x}')\,\mathrm{F}'_{x'}(xy\,;\mathring{x}'\mathring{y}') - (y'-\mathring{y}')\,\mathrm{F}'_{y'}(xy\,;\mathring{x}'\mathring{y}') = \\
&= \frac{1}{2}\Big\{\mathrm{F}''_{x'^2}(xy\,;\mathring{x}'\mathring{y}')\,(x'-\mathring{x}')^2 + 2\mathrm{F}''_{x'y'}(xy\,;\mathring{x}'\mathring{y}')\,(x'-\mathring{x}') + \\
&\qquad + \mathrm{F}''_{y'^2}(xy\,;\mathring{x}'\mathring{y}')\,(y'-\mathring{y}')^2\Big\} + \\
&\quad + \frac{1}{3\,!}\sum_{i+k=3}\binom{i}{3}\mathrm{F}'''_{x'^iy'^k}(xy\,;\overline{x}'\overline{y}')\,(x'-\mathring{x}')^i\,(y'-\mathring{y}')^k,
\end{aligned}
\tag{9}
$$

dove è $\overline{x}'=\mathring{x}'+\vartheta(x'-\mathring{x}')$, $\overline{y}'=\mathring{y}'+\vartheta(y'-\mathring{y}')$ con $0<\vartheta<1$: sarà quindi per le nostre ipotesi

$$
(10)\qquad |\mathrm{F}'''_{x'^iy'^k}(xy\,;\overline{x}'\overline{y}')| < \frac{2\mathrm{M}}{1+(1+k\omega)\,s'}\ \text{[1]}.\quad (i+k=3)
$$

Sostituiamo a $x'-\mathring{x}'$, $y'-\mathring{y}'$ i valori risultanti da (6), alle $\mathrm{F}''_{x'^2}$, $\mathrm{F}''_{x'y'}$, $\mathrm{F}''_{y'^2}$ le loro espressioni per F_1: il gruppo dei termini di 2° grado scritto fra parentesi in (9) si riduce a $\mathrm{F}_1(xy\,;\mathring{x}'\mathring{y}')\,\omega'^2$: mentre gli altri termini costituiscono un polinomio di 3° grado in ω', $1-(1+k\omega)\,s'$.

Ricordiamo ora che per (6) e (7) $1-\mathring{x}'x'-\mathring{y}'y'$ tende a 0 allora ed allora soltanto che ω' tende a zero e $(1+k\omega)\,s'$ tende a 1; ricordiamo ancora che (7) si può scrivere

$$
(11)\qquad \omega'^2 = [1-(1+k\omega)\,s']\,[1+(1+k\omega)\,s'];
$$

[1] Infatti posto $\nu^2=\overline{x}'^2+\overline{y}'^2$, sarà per (6) e (7) $\nu^2=1-2\vartheta(1-\vartheta)\,(1-(1+k\omega)s')$ onde poichè $\vartheta(1-\vartheta)\leq\frac{1}{4}$,

$$
\nu^2 \geq 1-\frac{1}{2}[1-(1+k\omega)\,s'] = \frac{1}{2}[1+(1+k\omega)\,s'].
$$

Ora si osservi che, posto $\xi=\frac{\overline{x}'}{\nu}$, $\eta=\frac{\overline{y}'}{\nu}$, abbiamo, poichè F è positivamente omogenea di primo grado rapporto a $x'y'$,

$$
\mathrm{F}'''_{x'^iy'^k}(xy\,;\xi\eta) = \nu^2\,\mathrm{F}'''_{x'^iy'^k}(xy\,;\overline{x}'\overline{y}'):
$$

ma $\xi^2+\eta^2=1$, quindi

$$
|\mathrm{F}'''_{x'^iy'^k}(xy\,;\xi\eta)| < \mathrm{M}\,,
$$

onde

$$
\mathrm{F}'''_{x'^iy'^k}(xy\,;\overline{x}'\overline{y}') < \frac{\mathrm{M}}{\nu^2} < \frac{2\mathrm{M}}{1+(1+k\omega)\,s'}.
$$

segue allora da (9) che le ipotesi 1° e 2° del nostro teorema si possono enunciare assieme dicendo che esistono due numeri positivi ϱ e μ_1 tali che quando xy dista da $\overset{\circ}{\mathfrak{C}}$ meno di ϱ, sia

$$\text{(12)}\qquad \frac{\mathcal{E}(xy\,;\,\mathring{x}'\mathring{y}'\,;\,x'y')}{1-(1+k\omega)\,s'} \geq \mu_1 \quad , \quad F_1(xy\,;\,\mathring{x}'\mathring{y}') \geq 2\,\mu_1\,.$$

Supporremo d'ora in poi $r \leq \varrho$.

Dividiamo i punti di $\mathfrak{C}$ in due insiemi χ e χ_1 a seconda che in essi è $s' \geq 0$ oppure $s' < 0$: indicheremo con χ e χ_1 anche le misure di χ e χ_1 rispettivamente: sarà $\chi + \chi_1 = \tau$.

Dico che si possono trovare delle funzioni λ_3 e λ_4 tali che in $\mathfrak{C}$ sia

$$\text{(13)}\quad \mathcal{E}(xy\,;\,\mathring{x}'\mathring{y}'\,;\,x'y') = \left[\frac{1}{2}\,F_1(xy\,;\,\mathring{x}'\mathring{y}') + \lambda_3\omega'\right]\omega'^2 + \lambda_4\,[1-(1+k\omega)\,s']$$

e che si abbia sempre

$$\text{(14)}\qquad \frac{1}{2}\,F_1(xy\,;\,\mathring{x}'\mathring{y}') + \lambda_3\,\omega' \geq \frac{\mu_1}{2}$$

$$\text{(15)}\qquad |\lambda_3| \leq L,\ \text{dove L è il massimo dei due numeri}\ \frac{32}{3}\,M\,,\ \frac{M^2}{\sqrt{7}\,\mu_1}$$

$$\text{(16)}\qquad \lambda_4 \geq 0\ \text{in}\ \chi\,,\qquad \lambda_4 \geq \frac{\mu_1}{2}\ \text{in}\ \chi_1\,.$$

Porremo perciò ad esempio:

$$\text{(17)}_1\qquad \lambda_3 = \frac{1}{3!}\sum_{i+k=3}\binom{i}{3}\,F'''_{x'^iy'^k}(xy\,;\,\overline{x}'\overline{y}')\left(\frac{x'-\mathring{x}'}{\omega'}\right)^i\left(\frac{y'-\mathring{y}'}{\omega'}\right)^k,\ \ \lambda_4 = 0$$

in χ ossia per $2 \geq 1 + (1+k\omega)\,s' \geq 1$;

$$\text{(17)}_2\qquad \begin{aligned} \lambda_3 &= \frac{1}{2\omega'}\,[\mu_1 - F_1(xy\,;\,\mathring{x}'\mathring{y}')],\\ \lambda_4 &= \frac{\mathcal{E}}{1-(1+k\omega)\,s'} - \frac{\mu_1}{2}\,(1+(1+k\omega)\,s') \end{aligned}$$

per $1 > 1 + (1+k\omega)\,s' \geq \frac{\mu_1}{2M}$ (¹); ed infine per $\frac{\mu_1}{2M} \geq 1 + (1+k\omega)\,s' \geq 0$

$$\lambda_3 = \sqrt{\frac{1+(1+k\omega)\,s'}{1-(1+k\omega)\,s'}}\,\frac{M}{\mu_1}\,[M - F_1(xy\,;\,\mathring{x}'\mathring{y}')]$$

$$\text{(17)}_3\quad \begin{aligned}\lambda_4 = \frac{\mathcal{E}}{1-(1+k\omega)\,s'} - \Big\{\frac{M}{\mu_1}\,[1+(1+k\omega)\,s'][M - F_1(xy\,;\,\mathring{x}'\mathring{y}')] +\\ + \frac{1}{2}\,F_1(xy\,;\,\mathring{x}'\mathring{y}')\Big\}\,(1+(1+k\omega)\,s').\end{aligned}$$

(¹) Si rammenti che, essendo per ipotesi $F_1 < M$, da (12) segue $M \geq 2\mu_1$ e quindi a maggior ragione pure $\frac{\mu_1}{2M} < 1$.

Si verifica subito, ricordando (11) che, con tali posizioni (13) risulta sempre identica. Per verificare la (14) si osservi che nei tre casi si ha rispettivamente

$$(14)_1 \qquad \frac{1}{2}F_1 + \lambda_3\omega' = \frac{\mathcal{E}}{\omega'^2} = \frac{\mathcal{E}}{1-(1+k\omega)s'} \cdot \frac{1}{1+(1+k\omega)s'} \geq \frac{\mu_1}{2},$$

$$(14)_2 \qquad \frac{1}{2}F_1 + \lambda_3\omega' = \frac{\mu_1}{2},$$

$$(14)_3 \qquad \frac{1}{2}F_1 + \lambda_3\omega' = [1+(1+k\omega)s']\frac{(M-F_1)M}{\mu_1} + \frac{1}{2}F_1 \geq \frac{1}{2}F_1 \geq \frac{\mu_1}{2}.$$

Più complesso è verificare la (15). Intanto in χ essendo $1+(1+k\omega')s' \geq 1$ la (10) dà che ivi è $|F'''_{x'^iy'^k}| < 2M$, mentre per (6), (8) e (11) si ha

$$\left|\frac{x'-\mathring{x}'}{\omega'}\right| = \left|\mathring{y}' - \mathring{x}'\frac{1-(1+k\omega)s'}{\omega'^2}\omega'\right| = \left|\mathring{y}' - \mathring{x}'\omega'\frac{1}{1+(1+k\omega)s'}\right| \leq 2$$

e similmente $\left|\dfrac{y'-\mathring{y}'}{\omega'}\right| \leq 2$ onde da $(17)_1$ segue che in χ è

$$(15)_1 \qquad |\lambda_3| < \frac{32}{3}M.$$

Da $(17)_2$ essendo allora $1 > 1+(1+k\omega)s' \geq \dfrac{\mu_1}{2M}$ e quindi per (11)

$$|\omega'| = \sqrt{[1+(1+k\omega)s'][(2-\{1+(1+k\omega)s'\}]} \geq \frac{\sqrt{(4M-\mu_1)\mu_1}}{2M},$$

segue subito

$$(15)_2 \qquad |\lambda_3| < \frac{M^2}{\sqrt{(4M-\mu_1)\mu_1}} < \frac{M^2}{\sqrt{7\mu_1^2}} = \frac{M^2}{\sqrt{7}\mu_1}.$$

Infine da $(17)_3$ si ha, essendo allora $1-(1+k\omega)s' \geq \dfrac{4M-\mu_1}{2M}$

$$(15)_3 \qquad |\lambda_3| < \sqrt{\frac{\mu_1}{4M-\mu_1}}\frac{M^2}{\mu_1} \leq \frac{1}{\sqrt{7}}\frac{M^2}{\mu_1}.$$

Infine per quanto riguarda la (16), essa vale evidentemente in χ. Da $(17)_2$ e (12) segue pure la (16) per il campo $1 > 1+(1+k\omega)s' \geq \dfrac{\mu_1}{2M}$. Ed infine da $(17)_3$ segue

$$(16)_3 \qquad \lambda_4 > \mu_1 - \left[\frac{M-2\mu_1}{2} + \frac{M}{2}\right]\frac{\mu_1}{2M} > \frac{\mu_1}{2}$$

come volevasi mostrare.

Si noti infine che, poichè le derivate prime di $F_1\,(xy\,;\mathring{x}'\mathring{y}')$ sono minori di M in valore assoluto, ed è $|x-\mathring{x}|<\omega$, $|y-\mathring{y}|<\omega$, si può ancora scrivere $\frac{1}{2}F_1(xy\,;\mathring{x}'\mathring{y}')=\frac{1}{2}\mathring{F}_1+\omega\lambda_5$ con

$$|\lambda_5|<M. \tag{18}$$

Ne segue che al posto di (13) si può ancora scrivere

$$\mathcal{E}=\left(\frac{1}{2}\mathring{F}_1+\lambda_5\omega+\lambda_3\omega'\right)\omega'^2+\lambda_4(1-(1+k\omega)\,s') \tag{19}$$

dove valgono le (15), (16), (18) e

$$\frac{1}{2}\mathring{F}_1+\lambda_5\omega+\lambda_3\omega'\geq\frac{\mu_1}{2}\,. \tag{19}$$

Nella prossima Nota utilizzeremo questi risultati per dimostrare in modo assai facile il teorema enunciato al n. 1.

Astronomia. — *Perturbazioni, efemeridi e luoghi normali del pianeta (674) Rachele.* Nota di E. Bianchi, presentata dal Socio E. Millosevich.

Nell'ultimo volume delle Memorie del R. Osservatorio al Collegio Romano (serie III, vol. V, parte I) ho reso conto delle tre osservazioni di prima opposizione da me poste a fondamento del calcolo degli elementi orbitali di questo pianeta, ed ho esposto non solo gli elementi stessi conclusi, ma pur anche l'ammontare delle perturbazioni causate da Giove e Saturno fra prima e seconda opposizione (1908-1909, 1910) e l'efemeride per la ricerca del pianeta in seconda opposizione. Nel numero 4501 delle Astronomische Nachrichten ho poi riportato i risultati ottenuti dalla correzione dell'orbita in base alle osservazioni di due sole opposizioni coll'ammettere nulle le correzioni ai due elementi Ω ed i del piano, e l'efemeride di ricerca in 3ª opposizione (giugno 1911) dedotta dagli elementi così corretti.

Tale correzione incompleta ebbe solo lo scopo di apportare agli elementi dell'orbita originale migliorie approssimate tali da rendere possibile di rintracciare in cielo il pianeta intorno alla sua 3ª opposizione senza penose ricerche. Nella presente Nota intendo di riassumere oltre i calcoli delle perturbazioni fra 2ª e 3ª opposizione, anche quelli relativi all'efemeride di 3ª opposizione che deriva dagli elementi originali non corretti, nonchè il paragone rigoroso di alcune osservazioni di 1ª, 2ª e 3ª opposizione colle relative efemeridi per arrivare alla conclusione di tre luoghi normali che do-