ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVIII.

1911

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XX.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1911

alle quadrature, quando su esse come linee fondamentali $\boldsymbol{\Gamma}$ si prendono le $v = \text{cost}$, rispetto alle quali l'equazione delle lossodromiche è

$$u = e^{\frac{v}{a}}\left[\frac{1}{a}\int \mathrm{W}_1 e^{-\frac{v}{a}} dv + c\right].$$

Abbiamo in questo caso

$$\theta_1 = ue^{-\frac{v}{g_1}} - \frac{1}{g_1}\int \mathrm{W}_1 e^{-\frac{v}{g_1}} dv \quad , \quad \theta_2 = ue^{-\frac{v}{g_2}} - \frac{1}{g_2}\int \mathrm{W}_1 e^{-\frac{v}{g_2}} dv\,;$$

$$\Phi_1 = e^{\frac{v}{g_1}} \quad , \quad \Phi_2 = e^{\frac{v}{g_2}}.$$

Matematica — *Sopra gli autovalori delle equazioni integrali a nucleo non simmetrico.* Nota di ERNESTO LAURA, presentata dal Socio C. SOMIGLIANA.

Il sig. Beudixon ha dato in Acta Mathematica, t. 25, pag. 360, un notevole teorema sopra le equazioni secolari, il quale parmi possa estendersi facilmente alle equazioni integrali. Di questo teorema dò una dimostrazione leggermente diversa da quella originaria di questo autore, dimostrazione la quale permette la suddetta estensione.

A questo scopo mi servirò della teoria delle sostituzioni nella sua forma più elementare come già ho avuto occasione [1] di usare in un altro mio lavoro.

Indichiamo con Δ una sostituzione dei complessi di ordine n, e con $|\Delta|$ il determinante della sua matrice. Se λ indica una quantità secolare, l'equazione in λ:

(1) $$|\Delta - \lambda| = 0$$

indicherà l'equazione secolare relativa al determinante $|\Delta|$. Ad ogni radice λ di (1), l'equazione

(2) $$\lambda\overline{x} = \Delta\overline{x}$$

è soddisfatta da complessi $\overline{x}$ non identicamenti nulli. Sia $\lambda_1 + i\lambda_2$ una radice imaginaria dell'equazione (1). Sia $\overline{x}_1 + i\overline{x}_2$ un complesso da cui la equazione (2) è soddisfatta quando per λ si pone $\lambda_1 + i\lambda_2$.

[1] E. Laura, *Sopra una classe generale di vibrazioni dei mezzi isotropi.* Atti della R. Accad. di Torino, vol. XLVI.

Supposto allora Δ a coefficienti reali, consegue dalla (2):

$$(3)\qquad \begin{cases} \lambda_1 \overline{x}_1 - \lambda_2 \overline{x}_2 = \Delta \overline{x}_1 \\ \lambda_2 \overline{x}_1 + \lambda_1 \overline{x}_2 = \Delta \overline{x}_2 . \end{cases}$$

Dalle quali equazioni si trae (il segno $\times$ indicando prodotto scalare):

$$(4)\qquad \lambda_1(\overline{x}_1^2 + \overline{x}_2^2) = \overline{x}_1 \times \Delta \overline{x}_1 + \overline{x}_2 \times \Delta \overline{x}_2 .$$

Mediante una trasformazione ortogonale sopra i complessi $\overline{x}$ determinabile in modo unico, riduciamo le forme quadratiche:

$$\overline{x}_1 \times \Delta \overline{x}_1 \qquad \overline{x}_2 \times \Delta \overline{x}_2$$

alle loro forme Canoniche. I coefficienti α_i di queste forme sono allora come è ben noto le radici dell'equazione secolare:

$$(5)\qquad \left| \frac{\Delta + \Delta'}{2} - \alpha \right| = 0 ,$$

nella quale Δ' è la sostituzione coniugata [1] di Δ.

L'equazione (4) diviene con ciò:

$$(6)\qquad \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} [y_1^{(i)2} + y_2^{(i)2}] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (y_1^{(i)2} + y_2^{(i)2})$$

nella quale le $y_1^{(i)}, y_2^{(i)}$ indicano gli elementi dei complessi trasformati dei complessi $\overline{x}_1 , \overline{x}_2$.

Dalla (6) consegue poi facilmente che λ_1 è, qualunque siano le $y_1^{(i)}$, $y_2^{(i)}$, compreso tra la massima e la minima delle quantità α_i, ossia tra la maggiore e la minore delle radici (tutte reali) dell'equazione (5). È questo il teorema del sig. Beudixon.

L'estensione di questo teorema alle equazioni integrali si fa ora facilmente tenendo presente un risultato del sig. Schmidt relativo allo sviluppo in serie di un nucleo simmetrico.

Consideriamo l'equazione integrale:

$$\lambda f(x) = \int_0^1 \varphi(x , y) f(y)\, dy$$

[1] Il termine *sostituzione contraria* usato nella Nota citata, pag. 13, è qui stato cambiato in *sostituzione coniugata* per seguire la terminologia più comunemente usata. Cfr. G. Burali-Forti e R. Marcolongo, *Omografie vettoriali con applicazioni alle derivate rispetto ad un punto e alla fisica mat.*, Torino, 1909.

il nucleo $\varphi(x, y)$ essendo qualunque (però reale). Sia λ complesso e si ponga

$$\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 .$$

L'autofunzione corrispondente sia:

$$f_1(x) + if_2(x) .$$

Dalla (7), separando la parte reale e l'imaginaria, consegue:

$$(8) \qquad \begin{cases} \lambda_1 f_1(x) - \lambda_2 f_2(x) = \int_0^1 \varphi(x, y)\, f_1(y)\, dy \\ \lambda_1 f_2(x) + \lambda_2 f_1(x) = \int_0^1 \varphi(x, y)\, f_2(y)\, dy . \end{cases}$$

Dalla quale:

$$\lambda_1 \int_0^1 [f_1^2(x) + f_2^2(x)]\, dx =$$

$$= \int_0^1 f_1(x)\, dx \int_0^1 \varphi(x, y)\, f_1(y)\, dy + \int_0^1 f_2(x)\, dx \int_0^1 \varphi(x, y)\, f_2(y)\, dy .$$

Ed anche:

$$(9) \qquad \begin{aligned} &\lambda_1 \int_0^1 [f_1^2(x) + f_2^2(x)]\, dx = \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{\varphi(x, y) + \varphi(y, x)}{2} [f_1(x)\, f_1(y) + f_2(x)\, f_2(y)]\, dx\, dy . \end{aligned}$$

Il nucleo

$$\frac{\varphi(x, y) + \varphi(y, x)}{2}$$

è simmetrico e i suoi autovalori sono reali. Sieno questi ultimi:

$$\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \ldots$$

e le corrispondenti autofunzioni normalizzate sieno:

$$\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots$$

Si ha allora (¹):

$$\frac{\varphi(x, y) + \varphi(y, x)}{2} = \sum_i^\infty \alpha_i\, \psi_i(x)\, \psi_i(y)$$

(¹) Cfr. E. Schmidt, Mathematische Annalen, Bd. LXIV.

e la serie del 2° membro sia uniformemente convergente. Dalla (9) si deduce:

$$\lambda_1 \int_0^1 [f_1^2(x) + f_2^2(x)]\, dx =$$

$$(10) \qquad = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \left\{ \left[\int_1^1 \psi_i(x)\, f_1(x)\, dx \right]^2 + \left[\int_0^1 \psi_i(x)\, f_2(x)\, dx \right]^2 \right\}.$$

Per la disuguaglianza di Bessel si ha ora:

$$\int f_1^2(x)\, dx > \sum_i \left[\int f_1(x)\, \psi_i(x)\, dx \right]^2 .$$

Consegue perciò che λ_1 è maggiore della minore delle quantità α_i.

Si ha perciò il teorema: *La parte reale del reciproco, di ogni autovalore dell'equazione integrale*

$$f(x) = \lambda \int_2^1 \varphi(x\,,y)\, f(y)\, dy$$

è maggiore della minore delle quantità

$$\alpha_1\,, \alpha_2\,, \ldots$$

essendo $\dfrac{1}{\alpha_i}$ *gli autovalori dell'equazione integrale a nucleo simmetrico*:

$$f(x) = \lambda \int_0^1 \frac{\varphi(x\,,y) + \varphi(y\,,x)}{2}\, f(y)\, dy .$$

Dall'eguaglianza (10) consegue ancora: *Condizione sufficiente affinchè la parte reale di ogni autovalore dell'equazione integrale*

$$f(x) = \lambda \int_0^1 \varphi(x\,,y)\, f(y)\, dy$$

sia positiva, è che l'equazione integrale:

$$f(x) = \lambda \int_0^1 \frac{\varphi(x\,,y) + \varphi(y\,,x)}{2}\, f(y)\, dy$$

abbia tutti i suoi autovalori positivi.

Questo teorema può avere applicazioni in Fisica-Matematica, che spero indicare fra breve.