ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVIII.

1911

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XX.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1911

Il grandissimo numero di alate sessupare, superiore a quello delle attere virginopare, è un fattore che contribuisce potentemente a tenere in freno la infezione sui cerri, sicchè molte piante restano disinfettate, o hanno solo sessuali, che per sè non producono danni. Ai primi di dicembre si trovano ancora le ultime attere virginopare, che molto probabilmente appartengono alla stessa generazione delle ultime alate sessupare. Le figlie di queste attere ibernano, come prime larve, sulle gemme e sui ramoscelli; esse non sono mai molto numerose.

Dati storici. — La fillossera del cerro è stata scoperta da Targioni-Tozzetti, che ne ha fatto conoscere la serie virginopara attera e la serie alata. Successivamente il Del Guercio, avvalorando sospetti avanzati da altri autori, erroneamente fondeva questa specie con la *Moritziella corticalis*. In Note precedenti la Foà pubblicava una parte del ciclo evolutivo che ora è qui esposto completamente.

Meccanica. — *Sulla torsione di un cilindro di rotazione.* Nota del Corrisp. O. Tedone.

1. In questa Nota ci occupiamo di una serie di quistioni che, con giusta ragione, possono essere comprese sotto il nome di problema generale della torsione di un cilindro di rotazione. La soluzione ne è sempre molto semplice, per quanto non sia a mia conoscenza che essa sia stata mai data da altri, ed ha qualche importanza perchè conduce ad una generalizzazione della formola di Coulomb e ad un caso semplice in cui si può sperimentare il noto principio intuitivo di de Saint-Venant.

Supponiamo che il cilindro che vogliamo prendere in considerazione abbia per lunghezza h ed R per raggio della base. Scegliamo quindi gli assi coordinati in modo che l'origine sia nel centro di una delle basi e che l'asse del cilindro cada sulla parte positiva dell'asse z; e, introducendo coordinate cilindriche, poniamo:

$$x = l \cos \psi \quad , \quad y = l \operatorname{sen} \psi \,. \tag{1}$$

Le quistioni a cui abbiamo alluso in principio sono quelle quistioni d'equilibrio su un cilindro di rotazione in cui sulla superficie laterale e sulle due basi sono dati gli spostamenti, ovvero le tensioni, sotto le rispettive forme:

$$u = -u_\psi \operatorname{sen} \psi \quad , \quad v = u_\psi \cos \psi \quad , \quad w = 0 \tag{2}$$

$$\mathrm{L} = -\mathrm{T}_\psi \operatorname{sen} \psi \quad , \quad \mathrm{M} = \mathrm{T}_\psi \cos \psi \quad , \quad \mathrm{N} = 0, \tag{3}$$

dove u_ψ e T_ψ si suppongono funzioni di z soltanto sulla superficie laterale e di l soltanto sulle due basi.

2. Mostriamo intanto dapprima che, se le condizioni in superficie sono della natura di quelle da noi indicate, gli spostamenti u, v, w hanno la forma (2) anche nei punti interni al cilindro dove u_ψ è allora una funzione di l e z da determinarsi opportunamente. Ammesso, infatti, che u, v, w abbiano sempre la forma (2), si soddisfa alle equazioni dell'equilibrio elastico per un corpo isotropo prendendo per u_ψ una funzione qualunque di l e z soddisfacente all'equazione

$$\frac{\partial^2 u_\psi}{\partial l^2}+\frac{1}{l}\frac{\partial u_\psi}{\partial l}-\frac{u_\psi}{l^2}+\frac{\partial^2 u_\psi}{\partial z^2}=0 \tag{4}$$

e, per convincersene, basta osservare che, nella ipotesi testè fatta, è $\theta=0$ e quindi u e v sono funzioni armoniche. Inoltre, nella stessa ipotesi, si trova subito che, sulla superficie laterale del cilindro e sulle basi, le tensioni hanno la forma (3) dove, sulla superficie laterale, è

$$\mathrm{T}_\psi=\mu\left(\frac{\partial u_\psi}{\partial l}-\frac{u_\psi}{l}\right);$$

sulle due basi, invece,

$$\mathrm{T}_\psi=\mp\mu\frac{\partial u_\psi}{\partial z},$$

il segno $-$ valendo per la base $z=0$ ed il segno $+$ per l'altra. Ciò basta a dimostrare il nostro asserto perchè la quistione da risolvere è ridotta, in ogni caso, a determinare la funzione u_ψ di l e z nel campo da $l=0$ ad $l=\mathrm{R}$, e da $z=0$ a $z=h$, in modo che in questo campo sia finita e soddisfi alla (4); per $l=\mathrm{R}$, u_ψ, ovvero $\frac{\partial u_\psi}{\partial l}-\frac{u_\psi}{l}$, acquisti valori assegnati in funzione di z e, infine, per $z=0$, $z=h$, u_ψ, ovvero $\frac{\partial u_\psi}{\partial z}$, acquisti dati valori in funzione di l.

Comunque siano scelte le condizioni ai limiti, questa quistione si risolve sempre senza difficoltà con i soliti metodi. Ci limiteremo perciò a considerare soltanto i due casi, particolarmente importanti, in cui: 1°) per $l=\mathrm{R}$ sia $\frac{\partial u_\psi}{\partial l}-\frac{u_\psi}{l}=0$ e quindi sono nulle le tensioni applicate ai punti della superficie laterale del cilindro; 2°) per $z=0$ sia $u_\psi=0$, ovvero $\frac{\partial u_\psi}{\partial z}=0$, e quindi, sulla base $z=0$ del cilindro siano nulli gli spostamenti, ovvero le tensioni; 3°) per $z=h$, $\frac{\partial u_\psi}{\partial z}$ assuma dati valori in funzione di l e quindi, sulla base $z=h$ del cilindro, sono applicate delle tensioni aventi la forma (3) e del resto, distribuite in un modo qualunque.

3. Per costruire la soluzione del problema nei due casi da noi indicati, poniamo:

$$\operatorname{Sen} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad , \quad \operatorname{Cos} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} ,$$

chiamiamo $J_1(x)$ la funzione di Bessel di prim'ordine e di prima specie, ed osserviamo, allora, che le due funzioni:

$$\text{(5)} \qquad J_1\left(k\frac{l}{R}\right)\operatorname{Sen}\left(k\frac{z}{R}\right) \quad , \quad J_1\left(k\frac{l}{R}\right)\operatorname{Cos}\left(k\frac{z}{R}\right)$$

soddisfano alla condizione

$$\text{(6)} \qquad \left(\frac{\partial u_\psi}{\partial l} - \frac{u_\psi}{l}\right)_{l=k} = 0$$

se k è radice dell'equazione

$$\text{(6')} \qquad k\,J_1'(k) - J_1(k) = 0 .$$

Inoltre, le due funzioni (5) sono sempre finite e, per $z = 0$, si annullano la prima di esse e la derivata rispetto a z della seconda. Abbiamo dunque, in queste due funzioni, le soluzioni elementari delle due quistioni che vogliamo risolvere. E le soluzioni generali saranno subito costruibili, se riusciamo a porre i valori dati di $\frac{\partial u_\psi}{\partial z}$ per $z = h$, nell'intervallo da $l = 0$ a $l = R$, sotto la forma

$$\frac{T_\psi}{\mu} = \left(\frac{\partial u_\psi}{\partial z}\right)_{z=h} = \Sigma_i\, A_i\, J_1\left(k_i \frac{l}{R}\right)$$

le k_i essendo le infinite radici reali della (6') e le A_i costanti determinate con le solite regole.

Ora, notando che, se k_i è radice della (6'),

$$\int_0^R l^2 J_1\left(k_i \frac{l}{R}\right) dl = 0 ,$$

si deduce che, affinchè ciò sia possibile, i valori dati per T_ψ sulla base $z = h$ del cilindro devono esser tali che

$$\text{(7)} \qquad \int_0^R l^2\, T_\psi\, dl = 0 .$$

Però, anche quando questa condizione non è verificata, si può sempre trovare una costante A tale che $T_\psi - Al$ vi soddisfi, bastando prendere

$$A = \frac{4}{R^4} \int_0^R l^2 T_\psi \, dl .$$

Si potrà allora scrivere

$$\frac{T_\psi}{\mu} = \left(\frac{\partial u_\psi}{\partial z}\right)_{z=h} = \frac{A}{\mu} l + \Sigma_i A_i J_1\left(k_i \frac{l}{R}\right)$$

e $\frac{A}{\mu} l$, come ogni altro termine della serie a secondo membro, soddisfa alla condizione (6), anzi vi soddisfa identicamente.

Il significato della condizione (7) si trova subito, osservando che, nel nostro caso, le tensioni applicate ai punti della base del cilindro $z = h$, hanno una somma nulla ed un momento M parallelo all'asse z e determinato dalla formola

$$M = 2\pi \int_0^R l^2 T_\psi \, dl ;$$

per cui la condizione in parola equivale all'altra che le tensioni applicate alla base $z = h$ si fanno equilibrio come se fossero applicate ai punti di un sistema rigido. Ne viene che, nel caso in cui si richiede che le tensioni applicate alla base $z = 0$ siano nulle, per la possibilità del problema si richiede che la (7) sia verificata; nell'altro caso, invece, in cui si richiede che per $z = 0$ sieno nulli gli spostamenti, la condizione (7) può essere verificata e può anche non esserlo.

Ciò stabilito, le due formole

$$u_\psi = \frac{A}{\mu} lz + R\, \Sigma_i \frac{A_i}{k_i} J_1\left(k_i \frac{l}{R}\right) \frac{\mathrm{Sen}\left(k_i \frac{z}{R}\right)}{\mathrm{Cos}\left(k_i \frac{h}{R}\right)}, \tag{8}$$

$$u_\psi = R\, \Sigma_i \frac{A_i}{k_i} J_1\left(k_i \frac{l}{R}\right) \frac{\mathrm{Cos}\left(k_i \frac{z}{R}\right)}{\mathrm{Sen}\left(k_i \frac{h}{R}\right)} \tag{8'}$$

risolvono il problema propostoci nei due casi che abbiamo detto di voler considerare.

4. Pel seguito ci limiteremo a considerare soltanto la (8). L'angolo di cui ogni elemento del cilindro rota intorno all'asse z è dato da

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\psi}{\partial l} + \frac{u_\psi}{l}\right)$$

e quindi gli elementi che sono sulla superficie laterale rotano di $\frac{1}{R}(u_\psi)_{l=R}$. Chiamando torsione del cilindro l'angolo ω di cui hanno rotato intorno all'asse z gli elementi che sono sul contorno della base $z = h$, avremo perciò

$$\omega = 2 \frac{M}{\pi \mu R^4} h + \Sigma_i \frac{A_i}{k_i} J_1(k_i) \frac{\operatorname{Sen}\left(k_i \frac{h}{R}\right)}{\operatorname{Cos}\left(k_i \frac{h}{R}\right)} \tag{9}$$

che è una generalizzazione della formola di Coulomb. Otteniamo quest'ultima formola quando i valori dati per T_ψ sulla base $z = h$ sono semplicemente proporzionali ad l, essendo, in quest'ultimo caso le A_i identicamente nulle.

5. La deformazione del cilindro, in generale, non solo dipende dal momento M del sistema delle tensioni applicate ai punti della sua base libera, ma dipende anche dal modo con cui queste tensioni sono distribuite su questa base.

Supponiamo però ora che il raggio R sia così piccolo da potersi considerare come infinitesimo rispetto ad h. Per esaminare quello che accade in questa ipotesi dobbiamo distinguere tre casi: 1°) z è dell'ordine di grandezza di R; 2°) z e $h - z$ sono dell'ordine di grandezza di h; 3°) $h - z$ è dell'ordine di grandezza di R. Nel primo caso è permesso di sostituire la (8)

$$u_\psi = \frac{A}{\mu} lz + 2R \Sigma_i \frac{A_i}{\mu} J_1\left(k_i \frac{l}{R}\right) e^{-k_i \frac{h}{R}} \operatorname{Sen}\left(k_i \frac{z}{R}\right),$$

con l'altra mentre negli altri due casi si può sostituire con la formola

$$u_\psi = \frac{A}{\mu} lz + R \Sigma_i \frac{A_i}{k_i} J_1\left(k_i \frac{l}{R}\right) e^{-k_i \frac{h-z}{R}};$$

e perciò, nei primi due casi, la parte principale di u_ψ è $\frac{A}{\mu} lz$, mentre nel terzo caso l'altra parte non è più trascurabile. Tutto ciò è conforme all'accennato principio di de Saint-Venant.

Nella stessa ipotesi precedente, la formola (9) diventa

$$\omega = 2 \frac{M}{\pi \mu R^4} h + \Sigma_i \frac{A_i}{k_i} J_1(k_i)$$

da cui discende che, per l'esattezza della formola di Coulomb, non è sufficiente ammettere R infinitesimo, ma, se non si vogliono fare ipotesi speciali sulla distribuzione delle tensioni sulla base libera del cilindro, bisogna anche contare la torsione fino ad un punto sufficientemente distante dall'estremo.

6. Noi abbiamo supposto in questa Nota che il cilindro sia costituito di materiale isotropo. Effettivamente, però, i nostri calcoli restano validi anche se si suppone soltanto che l'asse z sia un asse di isotropia. Se, infatti, ci troviamo in questo caso e poniamo, in conseguenza, pel potenziale elastico

$$-\Pi = \mathrm{A}(a+b)^2 + 2\mathrm{C}c(a+b) + \mathrm{C}c^2 + 2\mathrm{D}(h^2 - ab) + 2\mathrm{E}(f^2 + g^2)$$

dove A, B, ..., E sono costanti ed $a, b, \ldots, h$ le componenti della deformazione, costruendo le equazioni dell'equilibrio elastico e ponendo poi in esse: $w = 0$, $a + b = 0$ conseguenze dell'ipotesi (2), si trova che u soddisfa all'equazione

$$\mathrm{D}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \mathrm{E}\,\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

e che alla stessa equazione soddisfa anche v. Perciò la u_ψ, invece che alla (4), deve soddisfare ora all'equazione

$$\frac{\partial^2 u_\psi}{\partial l^2} + \frac{1}{l}\,\frac{\partial u_\psi}{\partial l} - \frac{u_\psi}{l^2} + \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{D}}\,\frac{\partial^2 u_\psi}{\partial z^2} = 0 .$$

Quindi, le A_i e le k_i avendo il significato di prima, la (8) sarà, semplicemente, sostituita dall'altra

$$u_\psi = 2\,\frac{\mathrm{M}}{\pi \mathrm{E} \mathrm{R}^4}\, lz + \mathrm{R}\sqrt{\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{D}}}\,\Sigma_i\,\frac{\mathrm{A}_i}{k_i}\,\mathrm{J}_1\!\left(k_i\,\frac{l}{\mathrm{R}}\right)\frac{\mathrm{Sen}\left(k_i\,\frac{z}{\mathrm{R}}\sqrt{\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{E}}}\right)}{\mathrm{Cos}\left(k_i\,\frac{h}{\mathrm{R}}\sqrt{\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{E}}}\right)}$$

e da una formola analoga sarà sostituita la (8').

Fisica Matematica. — *Sulla distribuzione della massa nell'interno dei pianeti.* Nota del Corrisp. G. Lauricella.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.