ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVIII.

1911

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XX.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1911

La differenza fra il valore teorico e il resultato sperimentale, per verità assai piccola, è verosimilmente da riferirsi sia all'errore di lettura (massimo di 0,5 mm), sia anche alle piccole oscillazioni di temperatura del termostato, per le quali l'apparecchio è sensibilissimo. S'aggiunga poi che detto valore teorico è fondato sopra determinazioni di peso specifico che, sebbene noi si sia cercato di fare colla maggiore accuratezza, indubbiamente presentano un errore piccolo in se stesso, ma che può avere influenza sul calcolo.

Meccanica. — *Il problema dei due corpi nell'ipotesi di masse variabili.* Nota dell'ing. GIUSEPPE ARMELLINI, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Matematia. — *Applicazione dell'algebra delle funzioni permutabili al calcolo delle funzioni associate.* Nota di C. EVANS, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sopra il regime permanente nei canali a rapido corso.* Nota di U. CISOTTI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Si abbia un canale, in regime permanente, a sponde verticali e fondo inclinato di un angolo α sull'orizzonte. Il moto del liquido — fluido perfetto, incomprimibile, omogeneo, pesante, la cui densità costante conviene assumere eguale a 1 — ha luogo per piani verticali paralleli alle sponde, i caratteri del movimento essendo i medesimi sopra una stessa perpendicolare alle sponde. Si è così condotti ad un moto piano permanente.

Si prenda in esame la porzione di canale compresa tra due sezioni trasversali, comunque assegnate.

Assunto il piano del moto come piano $z = 0$ di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, il campo che si considera è in questo piano circoscritto oltre che dal fondo rettilineo ϖ e dal *pelo libero* λ' anche, a monte e a valle, dalle tracce delle sezioni trasversali suaccennate [1].

[1] Nulla impedirebbe dal punto di vista *teorico* di estendere le nostre considerazioni anche al tratto di canale che, partendo dalla assegnata sezione trasversale a monte si protende indefinitamente a valle. La limitazione al tratto finito di canale è però imposta da considerazioni di indole pratica. Si constata in effetto, nei casi concreti, che il

Sieno: q la portata del canale; h e h_1 le misure della profondità del canale nelle due sezioni assegnate, la prima a monte, a valle l'altra; l la distanza delle sezioni stesse; c e c_1 le rispettive velocità medie.

Dato il regime permanente si ha $ch = c_1 h_1 = q$.

Si assuma nel piano del moto una coppia di assi x, y, coll'asse x coincidente col fondo ϖ e diretto nel senso della corrente e l'asse y coincidente colla sezione a monte e diretto verso il pelo libero λ'.

Il moto del liquido sia infine *irrotazionale*.

2. Per ciò e per l'incomprimibilità del liquido esistono: un *potenziale di velocità* $\varphi(x, y)$ e una *funzione di corrente* $\psi(x, y)$, regolari nel campo del moto e definite dalle equazioni

$$d\varphi = u\,dx + v\,dy \quad , \quad d\psi = -v\,dx + u\,dy, \tag{1}$$

colle determinazioni $\varphi = \psi = 0$ per $x = y = 0$, avendosi indicato con u e v le componenti della velocità nel punto generico (x, y).

Sopra λ' e sopra ϖ, trattandosi di linee di flusso, la ψ deve avere notoriamente valori costanti diversi, e la loro differenza deve uguagliare la portata q della corrente.

Pertanto, notando che nell'origine è $\psi = 0$, avremo

$$\psi = 0 \text{ sopra } \varpi \quad , \quad \psi = q \text{ sopra } \lambda'. \tag{2}$$

Sia p la pressione specifica, g l'accelerazione della gravità, $V = |\sqrt{u + v}|$ il valore assoluto della velocità.

Le equazioni idrodinamiche di Eulero si compendiano, nel nostro caso, nella relazione seguente

$$\tfrac{1}{2} V^2 - g(x \operatorname{sen} \alpha - y \cos \alpha) + p = \text{costante}.$$

Sul pelo libero λ', la pressione p è da ritenersi costante; sarà perciò

$$V^2 - 2g(x \operatorname{sen} \alpha - y \cos \alpha) = \text{costante, sopra } \lambda'. \tag{3}$$

3. Posto

$$\left\{ \begin{aligned} & x + iy = z, \\ & \varphi + i\psi = F(z), \\ & u - iv = \frac{dF}{dz} = f(x + iy); \end{aligned} \right. \tag{4}$$

---

moto della corrente non segue indefinitamente le leggi della continuità: ma che da una certa sezione trasversale in poi le particelle cominciano a staccarsi dalla massa liquida, e dànno principio ad un complesso fenomeno discontinuo.

Da ciò segue la convenienza di non spingersi oltre questa certa sezione.

F e f riescono notoriamente funzioni della variabile complessa $x+iy$; ciò che del resto è immediata conseguenza di (1).

Per avere una prima soluzione approssimata giova ora sfruttare il metodo escogitato da lord Rayleigh nel problema dell'*onda solitaria* [1].

Paragonando, *qualitativamente*, il moto di una particella liquida sul fondo del canale al movimento di un grave libero discendente sullo stesso piano e che parte dalla origine delle coordinate colla velocità c, e ammettendo — ciò che si accorda colla intuizione fisica e colle constatazioni di fatto — che la profondità del canale tenda a diminuire da monte a valle, si può ritenere che nello sviluppo

$$f(x+iy)=f(x)+iy\,f'(x)+\mathrm{R}\,, \tag{5}$$

è

$$|\mathrm{R}|<\left(\frac{2gh}{c^2}\right)^2 \text{ nonchè } y^2\left|\overline{f'(x)}^2\right|<\left(\frac{2gh}{c^2}\right)^2.$$

Sarà pertanto trascurabile l'ultimo termine dello sviluppo precedente se $\dfrac{2gh}{c^2}$ è *una quantità di primo ordine* (di cui cioè si possono ritenere nulle le potenze superiori alla prima), cioè *se la velocità media della sezione a monte è abbastanza rilevante rispetto alla velocità di caduta libera di un grave da un'altezza pari alla profondità del canale nella stessa sezione*.

Quando questa condizione è soddisfatta si dirà che nella sezione considerata il canale è a *rapido corso* [2].

4. Poichè in (5), colla voluta approssimazione, si può ritenere $\mathrm{R}=0$, da (4) si ricava, tenendo presente che per $x=y=0$ dev'essere $\varphi=\psi=0$,

$$\begin{cases}\varphi=\mathrm{F}(x)\ , & \psi=\ \ y f(x)\,;\\ u=f(x)\ , & v=-y f'(x)\,;\end{cases} \tag{6}$$

dove $\mathrm{F}(0)=0$.

La seconda di (2) e la (3) diventano, colla cennata approssimazione,

$$\left.\begin{cases} y f(x)=q\,,\\ \overline{f(x)}^2-2g(x \operatorname{sen}\alpha-y\cos\alpha)=\text{costante}\end{cases}\right\}\ \text{sopra } \lambda'\,. \tag{7}$$

[1] Scientific Papers, vol. I, pag. 256; ovvero Phil. Mag. I, pp. 257-279, 1876. Il problema stesso era già stato trattato poco prima dal Boussinesq: *Théorie de l'intumescence liquide appelée onde solitaire ou de translation, se propageant dans un canal rectangulaire* [Comptes Rendus, t. 72 (1° sem. 1871), pp. 755-759].

[2] Ne viene come conseguenza — poichè la velocità media va aumentando da monte a valle — che se il canale è a *rapido corso* in una determinata sezione, lo è pure nelle seguenti.

Eliminando la $f(x)$, si ricava la *equazione del pelo libero*

$$y^2(y \cos\alpha - x \operatorname{sen}\alpha + \text{costante}) + \frac{q^2}{2g} = 0, \tag{8}$$

alla quale deve aggiungersi l'ovvia condizione $y \geq 0$.

Come si vede, si tratta di una cubica. La costante del secondo membro va valutata in modo che per $x = 0$ sia $y = h$. In tal guisa la cubica è completamente definita.

Da (7) e (6) si deduce che la componente u della velocità, secondo il fondo del canale, è la stessa per tutti i punti di una medesima sezione trasversale (¹), ed ha per valore assoluto $\frac{q}{y}$, y essendo la profondità del canale nella sezione che si considera: la componente u non è altro che la velocità media nella sezione stessa.

5. Se si pone successivamente nella (8): una prima volta $x = 0$, $y = h$; una seconda volta $x = l$, $y = h_1$, indi si sottraggono le due relazioni ottenute dopo di averle moltiplicate rispettivamente per h_1^2 e h^2; e si ha presente che $ch = c_1 h_1 = q$, si ottiene la seguente notevole relazione:

$$l \operatorname{sen}\alpha + q\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{c_1}\right)\cos\alpha + \frac{c^2 - c_1^2}{2g} = 0, \tag{9}$$

tra elementi sperimentali.

Nei casi pratici (*canali industriali*) si può, con grande approssimazione, trascurare le potenze di α superiori alla prima (²), e sostituire alla (9) la seguente:

$$l\alpha = q\left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c}\right) + \frac{1}{2g}(c_1^2 - c^2). \tag{9'}$$

6. *Fondo orizzontale.* — In tal caso $\alpha = 0$, e l'equazione (8) dà $y =$ costante, ossia (poichè per $x = 0$ è $y = h$) $y = h$.

Il pelo libero è disposto secondo una retta orizzontale. In particolare da $ch = c_1 h_1$, essendo $h_1 = h$, si ricava $c_1 = c$, si ha cioè il regime *uniforme*, com'era evidente *a priori*.

7. *Getto liquido verticale.* — Per $\alpha = \frac{\pi}{2}$ il fondo del canale è verticale e il senso della corrente è discendente.

(¹) Cfr. Boussinesq, loc. cit.

(²) Infatti i massimi valori di sen α non superano mai, praticamente, il 4 ‰. Devo questa ed altre indicazioni pratiche a cortesi comunicazioni del chmo prof. Turazza, cui porgo vivi ringraziamenti.

Si immagini di operare la riflessione del campo del moto rispetto all'asse x (fondo del canale). Si ottiene una vena liquida limitata tra le linee libere λ' e λ'' (immagine riflessa di λ'). Reciprocamente se una vena verticale discendente ha andamento simmetrico rispetto all'asse x, ciò significa che in punti simmetrici rispetto a quest'asse le velocità devono essere simmetriche: in particolare sopra i punti dell'asse x le velocità devono essere situate sopra l'*asse stesso*, il quale pertanto *si comporta come una parete rigida*.

Ne consegue che le nostre conclusioni sono applicabili anche ai getti liquidi verticali.

Le equazioni delle linee libere λ' e λ'' si hanno da (8) ponendovi $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Si ottiene

$$y^2(-x + \text{costante}) + \frac{q^2}{2g} = 0,$$

la quale per $y \geq 0$ definisce la λ', e per $y \leq 0$ la λ''. Come era da attendersi, le due curve sono simmetriche rispetto all'asse x.

Da (9) si ha invece

$$c_1^2 - c^2 = 2gl.$$

Questa dice che *le velocità medie delle varie sezioni trasversali seguono la legge della velocità di caduta dei gravi*.

Matematica. — *Su le funzioni ordinatrici delle funzioni reali di una o più variabili reali*. Nota di FILIPPO SIBIRANI, presentata dal Socio SOMIGLIANA.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Astronomia — *Orbita di (674) Rachele corretta in base alle osservazioni delle tre prime opposizioni.* Nota di E. BIANCHI, presentata dal Socio E. MILLOSEVICH.

In una precedente Nota [1] ho concluso, dalle osservazioni di 1ª, 2ª e 3ª opposizione, tre corrispondenti luoghi normali *perturbati* del pianeta. Nella presente riassumo i risultati dei calcoli fatti per correggere gli elementi che erano stati dedotti dalle osservazioni di 1ª opposizione.

La correzione è stata fatta col metodo della variazione delle distanze geocentriche; metodo che, come è noto, implica la conoscenza di luoghi nor-

[1] Rendiconti Accad. Lincei, vol. XX, fasc. 10°, pag. 547.