ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVIII.

1911

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XX.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1911

Meccanica. — *Sulla teoria della gravitazione.* Nota di MAX ABRAHAM, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In un lavoro recente A. Einstein [1] ha enunciato l'ipotesi, che la velocità della luce (c) dipenda dal potenziale di gravitazione (Φ). Nella Nota presente propongo una teoria della gravitazione, la quale, accordandosi col principio di relatività, giunge ad una relazione tra c e Φ equivalente in prima approssimazione a quella dell'Einstein. Questa teoria assegna alla densità dell'energia ed alla corrente di energia nel campo gravitazionale valori diversi da quelli finora ammessi.

Seguendo la rappresentazione di Minkowski [2] consideriamo

$$x, y, z \quad \text{ed} \quad u = il = ict$$

come coordinate di uno spazio a quattro dimensioni. La « densità di riposo » [2] ν sia uno scalare in questo spazio, e così pure il potenziale di gravitazione Φ. Essi siano collegati dall'equazione differenziale:

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} = 4\pi\gamma\nu$$

(γ è la costante di gravitazione).

La « forza motrice » agente nel campo di gravità sulla massa unitaria sia eguale ed opposta al gradiente di Φ:

$$(2) \qquad F = -\operatorname{grad} \Phi,$$

cioè

$$(2a) \qquad F_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad F_u = -\frac{\partial \Phi}{\partial u}.$$

Secondo le (1) e (2), la gravitazione si propaga colla velocità della luce, come lo richiede il principio di relatività; però le *onde gravitazionali sono longitudinali*, le onde luminose invece trasversali.

Designino $\dot{x}\,\dot{y}\,\dot{z}\,\dot{u}$ le derivate prime delle coordinate di un punto materiale rispetto al suo « tempo proprio » [2] τ, cioè le componenti del vettore « velocità », e $\ddot{x}\,\ddot{y}\,\ddot{z}\,\ddot{u}$ le derivate seconde, le componenti del vettore « accelerazione ». Le *equazioni del moto* [3] sono:

$$(3) \qquad \ddot{x} = F_x, \quad \ddot{y} = F_y, \quad \ddot{z} = F_z, \quad \ddot{u} = F_u.$$

[1] A. Einstein, Annalen der Physik, 35, pag. 898 (1911).

[2] H. Minkowski, Göttinger Nachrichten, 1908, pag. 53.

[3] Se alla materia viene trasmessa energia di forma non meccanica, occorre modificare le equazioni del moto di Minkowski (vedi M. Abraham, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, XXX, 1910[2]). Ma nella Nota presente considereremo azioni puramente meccaniche.

Ora per le derivate prime vale la relazione identica:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 + \dot{u}^2 = -c^2, \tag{4}$$

cioè

$$i^2 \left\{ \left(\frac{dx}{dl}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dl}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dl}\right)^2 - 1 \right\} = -c^2$$

ossia, ponendo

$$\beta^2 = \left(\frac{dx}{dl}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dl}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dl}\right)^2 \quad , \quad k = \sqrt{1-\beta^2}, \tag{4a}$$

$$i = \frac{c}{\sqrt{1-\beta^2}} = ck^{-1}. \tag{4b}$$

Derivando la (4) rispetto al tempo proprio, il Minkowski giunge alla « condizione di ortogonalità » tra i vettori velocità ed accelerazione. Però questa ortogonalità non ha più luogo, se c viene considerato come variabile; in questo caso invece dalla (4) deriva la relazione

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z} + \dot{u}\ddot{u} = -c\frac{dc}{d\tau}, \tag{5}$$

la quale sostituisce la condizione di ortogonalità. Introducendo nella (5), invece dell'accelerazione, la forza motrice (2), otteniamo

$$\dot{x}\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \dot{z}\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \dot{u}\frac{\partial \Phi}{\partial u} = c\frac{dc}{d\tau},$$

ossia

$$\frac{d\Phi}{d\tau} = c\frac{dc}{d\tau}.$$

Integrando risulta

$$\frac{c^2}{2} - \frac{c_0^2}{2} = \Phi - \Phi_0, \tag{6}$$

se c_0 è la velocità della luce nell'origine, dove il potenziale è Φ_0. Vale a dire: *L'incremento del semi-quadrato della velocità della luce è eguale all'incremento del potenziale di gravitazione.*

Questa relazione, che sussiste rigorosamente nella nostra teoria, può trascurando il quadrato del rapporto tra Φ e c^2 essere sostituita dalla formola dell'Einstein (loc. cit., pag. 906):

$$c = c_0\left(1 + \frac{\Phi - \Phi_0}{c^2}\right).$$

Però la (6) mette meglio in rilievo l'indipendenza dall'origine, la cui scelta fu arbitraria.

Giova confrontare la relazione ottenuta colla teoria emissiva della luce. Immaginiamo che da un corpo luminoso vengano emesse particelle moventisi secondo le leggi della meccanica del Galilei, e soggette alla gravità. Queste particelle subirebbero un incremento dell'energia cinetica, eguale al *decremento* dell'energia potenziale. Invece, secondo la (6), l'incremento della forza viva delle particelle è eguale all'*incremento* della loro energia potenziale, cioè eguale in valore, ma opposto in segno a quella calcolata in base alla teoria emissiva. Però la curvatura [1] dei raggi luminosi nel campo di gravità, che segue dalla (6) per il principio di Huygens, è identica a quella della traiettoria di tali particelle. È questa una delle molte analogie incomplete tra la teoria moderna dell'energia radiante e la teoria emissiva.

Studiamo il moto di un punto materiale di massa m, nel campo di gravità. Le tre prime delle equazioni di moto (3) dànno:

$$(7) \qquad m\frac{d\dot{x}}{d\tau} = -m\frac{\partial\Phi}{\partial x}\,,\quad m\frac{d\dot{y}}{d\tau} = -m\frac{\partial\Phi}{\partial y}\,,\quad m\frac{d\dot{z}}{d\tau} = -m\frac{\partial\Phi}{\partial z}\,.$$

Esse esprimono il teorema dell'impulso. L'ultima delle (3) invece:

$$(8) \qquad m\frac{d\dot{l}}{d\tau} = -m\,i\,\mathrm{F}_u = m\,i\,\frac{\partial\Phi}{\partial u} = m\,\frac{\partial\Phi}{\partial l}$$

esprime, nella meccanica di Minkowski, il teorema della forza viva. Se il campo di gravità dipende dalle coordinate x, y, z soltanto, e non dal tempo, si ottiene, moltiplicando la (8) per c, e tenendo conto della ($4b$):

$$(9) \qquad m\,c\,\frac{d}{d\tau}(ck^{-1}) = 0.$$

Ora il Minkowski, ritenendo c costante, interpreta $m(c^2k^{-1} - 1)$ come energia cinetica del punto materiale. Invece nella teoria attuale, che considera c come variabile, questo procedimento non sarebbe più valido. E pare impossibile assegnare all'energia del punto materiale un'espressione generale, il cui decremento sia esattamente eguale all'energia trasmessagli dal campo di gravitazione.

Però potremo mostrare che, almeno per velocità piccole, dalla (9) segue il teorema della conservazione dell'energia, confermato dai fatti. Dalla (9) si ricava:

$$(9a) \qquad m\,c\,k^{-1} = \text{costante}.$$

[1] A. Einstein, loc. cit., mostrò, che un raggio passante alla superficie del sole viene deviato verso il centro del sole, e richiamò l'attenzione degli astronomi su questa conseguenza della teoria, suscettibile di un confronto coll'osservazione.

Trascurando quadrati e prodotti di β^2 e di $(\Phi - \Phi)_0/c^2$ poniamo, secondo la (4*a*):

$$k^{-1} = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2}\beta^2 \ , \ \beta^2 = \frac{v^2}{c_0^2} \ ,$$

e, secondo la (6):

$$c = (c_0^2 + 2(\Phi - \Phi_0))^{\frac{1}{2}} = c_0 + \frac{\Phi - \Phi_0}{c_0} \ .$$

Otteniamo dunque

$$m\,c\,k^{-1} = m\,c_0(1 + \tfrac{1}{2}\beta^2) + m \cdot \frac{\Phi - \Phi_0}{c_0} \ .$$

Moltiplicando la (9*a*) per la costante c_0, segue

$$(9b) \qquad \tfrac{1}{2}\,m\,v^2 + m\,\Phi = \text{costante},$$

cioè il teorema della conservazione dell'energia nella forma solita. *Nel caso limite quindi di velocità piccole la nuova meccanica si accorda colla vecchia.* E risulta la conseguenza della relazione (6) tra c e Φ: Tanto « *l'energia potenziale* » $m\,\Phi$, quanto quella « *cinetica* » $\frac{1}{2}\,m\,v^2$, *vengono trasportate dal punto materiale stesso.*

Consideriamo ora due punti materiali, di masse m_0 e m, moventisi, con velocità piccole, in un campo di gravità stazionario. Ognuno dei punti possiede un'energia potenziale, la cui parte variabile colla distanza r dall'altro è:

$$-\gamma\frac{m_0\,m}{r} = -\mathrm{E} \ .$$

Quindi la parte variabile dell'energia potenziale dei due punti è $-2\,\mathrm{E}$. Onde se i due punti seguendo l'attrazione reciproca si avvicinano, l'incremento della loro energia cinetica totale è eguale alla metà del decremento della loro energia potenziale totale.

Dove rimane l'altra metà? Evidentemente nel campo di forza gravitazionale. Infatti, come vedremo, la nostra teoria assegna all'energia del campo in questo caso il valore E, eguale ed opposto a quello ammesso finora. Così scompare la difficoltà enunciata dal Maxwell [1], che la densità dell'energia del campo gravitazionale — ponendola zero dove la forza è nulla — diventerebbe negativa altrove. *L'espressione* (13) *per la densità dell'energia nel campo di gravità*, alla quale giungeremo, *è essenzialmente positiva.* Ma l'energia totale del sistema contiene, oltre all'energia del campo E, l'energia della materia, la cui parte potenziale è eguale a $-2\,\mathrm{E}$, nel campo stazionario.

[1] Clerk Maxwell, Scientific papers I, pag. 570.

Al Volterra [1] spetta il merito di avere esteso il concetto di flusso dell'energia al campo di gravità. La sua espressione per il flusso però si fonda sul valore Maxwelliano dell'energia del campo. Evidentemente la teoria attuale, abbandonando quest'ultima espressione dell'energia, dovrà assegnare altre espressioni anche alle componenti della corrente di energia.

Le tensioni fittizie, la corrente di energia, e le densità dell'energia e dell'impulso del campo dipendono da un « *tensore quattrodimensionale* » [2], che sarà determinato nella Nota seguente.

Meccanica. — *Il problema dei due corpi nell'ipotesi di masse variabili.* Nota dell'ing. Giuseppe Armellini, presentata dal Socio V. Volterra.

Generalità.

Oppolzer, studiando la teoria della luna, propose il problema della determinazione del moto relativo di due corpi attraentisi con legge Newtoniana, le cui masse crescano col tempo. Il problema fu in seguito trattato dal Gyldèn, Lehmann-Filhès, Mestchersky, Strömgren, Plummer e Terkan (Astr. Nachr. 2593, 3153, 3479, 3897, 4325; Monthly, Not. LXVI, 83) i quali considerarono il problema dal lato astronomico cercando di risolverlo con approssimazioni successive.

In questa Nota io considero il problema dal lato analitico, studio le proprietà generali del moto, estendo un teorema fondamentale di Gyldèn, do una soluzione col metodo della stella di Mittag Leffler, e una seconda soluzione semplice e approssimata per i bisogni astronomici.

Proprietà del moto.

Studiamo il moto relativo di uno dei punti B intorno all'altro A: sappiamo intanto che il moto è piano e obbedisce alla legge delle aree. Suppongo la somma delle masse dei due punti $M(t)$ funzione sempre crescente del tempo, divenente ∞ solo per $t = \infty$. La costante delle aree c la suppongo sempre diversa da 0. Abbiamo i seguenti teoremi:

I) « Se la traiettoria di B passa per un punto del piano con una certa direzione ed una certa curvatura, essa non può più ripassarvi con la stessa

[1] V. Volterra, Nuovo Cimento, 1899[1], pag. 337.

[2] *Sui tensori quattrodimensionali*, vedi M. Abraham, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 1910[1]; A. Sommerfeld, Annalen der Physik, 32 (1910), pag. 749; M. Laue, *Das Relativitätsprincip*. Braunschweig, 1911, pag. 73.