ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVIII.

1911

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XX.

2° SEMESTRE.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1911

Al Volterra (¹) spetta il merito di avere esteso il concetto di flusso dell'energia al campo di gravità. La sua espressione per il flusso però si fonda sul valore Maxwelliano dell'energia del campo. Evidentemente la teoria attuale, abbandonando quest'ultima espressione dell'energia, dovrà assegnare altre espressioni anche alle componenti della corrente di energia.

Le tensioni fittizie, la corrente di energia, e le densità dell'energia e dell'impulso del campo dipendono da un « *tensore quattrodimensionale* » (²), che sarà determinato nella Nota seguente.

Meccanica. — *Il problema dei due corpi nell'ipotesi di masse variabili.* Nota dell'ing. GIUSEPPE ARMELLINI, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

GENERALITÀ.

Oppolzer, studiando la teoria della luna, propose il problema della determinazione del moto relativo di due corpi attraentisi con legge Newtoniana, le cui masse crescano col tempo. Il problema fu in seguito trattato dal Gyldèn, Lehmann-Filhès, Mestchersky, Strömgren, Plummer e Terkan (Astr. Nachr. 2593, 3153, 3479, 3897, 4325; Monthly, Not. LXVI, 83) i quali considerarono il problema dal lato astronomico cercando di risolverlo con approssimazioni successive.

In questa Nota io considero il problema dal lato analitico, studio le proprietà generali del moto, estendo un teorema fondamentale di Gyldèn, do una soluzione col metodo della stella di Mittag Leffler, e una seconda soluzione semplice e approssimata per i bisogni astronomici.

PROPRIETÀ DEL MOTO.

Studiamo il moto relativo di uno dei punti B intorno all'altro A: sappiamo intanto che il moto è piano e obbedisce alla legge delle aree. Suppongo la somma delle masse dei due punti $M(t)$ funzione sempre crescente del tempo, divenente ∞ solo per $t=\infty$. La costante delle aree c la suppongo sempre diversa da 0. Abbiamo i seguenti teoremi:

I) « Se la traiettoria di B passa per un punto del piano con una certa direzione ed una certa curvatura, essa non può più ripassarvi con la stessa

(¹) V. Volterra, Nuovo Cimento, 1899¹, pag. 337.

(²) *Sui tensori quattrodimensionali*, vedi M. Abraham, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 1910¹; A. Sommerfeld, Annalen der Physik, 32 (1910), pag. 749; M. Laue, *Das Relativitätsprincip*. Braunschweig, 1911, pag. 73.

direzione e la stessa curvatura simultaneamente. B non può quindi descrivere due volte uno stesso arco di curva: le orbite chiuse sono impossibili » [1].

Pongo l'origine in A, chiamo con r e ϑ le coordinate polari di B e con K la costante attrattiva. Scrivo l'equazioni del moto relativo e con trasformazioni elementari ricavo subito

$$r^2\vartheta' = c \tag{1}$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{c^2}{r^3} - \mathrm{K}\,\frac{\mathrm{M}(t)}{r^2} \tag{2}$$

$$\frac{1}{2}\frac{dv^2}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{c^2}{r^2}\right] = -\frac{\mathrm{KM}(t)}{r^2}\frac{dr}{dt}. \tag{3}$$

Prendo l'espressione del raggio di curvatura R in coordinate polari e valendomi della (1) e della (2) ottengo dopo brevi calcoli

$$\mathrm{R} = \frac{c^2}{\mathrm{KM}(t)}\left[r^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}.$$

Essa mostra che se r e $\dfrac{dr}{d\vartheta}$ riprendono lo stesso valori in tempi diversi, non può riprenderlo R. c. d. d.

II) « Se r ammette un limite superiore L, allora crescendo il tempo, r deve divenire minore di ogni quantità assegnata ».

Chiamiamo con σ una quantità positiva piccola a piacere. Se fosse sempre $r > \sigma$ della (2) avremmo

$$\frac{d^2r}{dt^2} < \frac{c^2}{\sigma^3} - \mathrm{K}\,\frac{\mathrm{M}(t)}{\mathrm{L}^2}$$

vale a dire indicando con $-2\alpha^2$ una quantità negativa arbitraria, sarebbe possibile trovare un certo tempo τ tale che da τ in poi si avesse sempre $\dfrac{d^2r}{dt^2} < -2\alpha^2$ e quindi $r < -\alpha^2t^2 + \beta t + \gamma$. Crescendo t, r diverrebbe 0 e poi < 0, il che è assurdo. Quindi r deve divenire $< \sigma$. c. d. d.

III) « La r non può divenire 0 per qualsiasi valore di t ».

Ricordiamo essere $c \gtrless 0$. Vediamo s'è possibile che r s'annulli per $t = \tau$. Supponiamo per generalità che $r = r(t)$ abbia dei massimi e minimi tra $t = 0$ e $t = \tau$, per es. un minimo per $t = t_1$ e un massimo per $t = t_2$. Riprendiamo l'equazione (3), dividiamo l'intervallo 0τ, nei tre intervalli $0t_1$, t_1t_2, $t_2\tau$ durante i quali il dr ha sempre il medesimo segno e

[1] Analogamente sarebbe facile provare che l'orbita di B non ammette alcun asse di simmetria passante per l'origine A.

integriamo col teorema della media. Ricordando che $M(t)$ è funzione crescente del tempo avremo dopo facili riduzioni

$$(4) \qquad \frac{c^2}{r^2_{t=\tau}} < v^2_{t=0} + 2KM(\tau)\frac{1}{r_{t=\tau}}.$$

Dalla quale se $r_{t=\tau}$ fosse $=0$, si avrebbe l'assurdo $\infty^2 < \infty$. Sarà quindi $r_{t=\tau} > 0$. c. d. d.

Estensione del teorema di Gyldèn.

Chiamiamo con $h_{t=0}$ la differenza iniziale tra la forza viva e il potenziale di B. Gyldèn ha dimostrato che se si ha $h_{t=0} < 0$, crescendo indefinitamente il tempo, r tende a 0. Estendendo il teorema di Gyldèn possiamo dire:

« Dati due corpi A e B attraentisi con legge Newtoniana, affinchè la loro distanza r *qualunque siano le loro condizioni iniziali*, tenda a 0 crescendo indefinitamente il tempo, è necessario ed è sufficiente che la somma $M(t)$ delle loro masse per $t=\infty$ divenga ∞ d'ordine non inferiore al 1° rispetto a t ».

Ricordo che $M(t)$ è funzione crescente di t. Per maggior chiarezza divido il teorema in due:

α) Se $M(t)$ diviene ∞ d'ordine inferiore al 1° rispetto a t, è sempre possibile scegliere le condizioni iniziali in modo che il punto B si allontani indefinitamente da A.

Consideriamo sul piano del moto, un punto mobile ausiliare P e sia s la sua distanza da A variabile secondo la legge

$$(5) \qquad \frac{d^2s}{dt^2} = -K\frac{M(s)}{s^2}.$$

Sia $s_{t=0} > 0$.

Possiamo scegliere la velocità iniziale radiale $\left(\frac{ds}{dt}\right)_{t=0}$ in modo tale che P vada all' ∞ e che il $\frac{ds}{dt}$ sia sempre >1. Basta a tale scopo osservare che $\int_{s_{t=0}}^{\infty}\frac{M(s)}{s^2}ds$ è convergente. Sarà allora $s>t$, $M(s)>M(t)$. Tornando al punto B dalla (2) e dalla (5) ricavo con facilità

$$\frac{d^2r}{dt^2} > \frac{d^2s}{dt^2} + KM(s)\left[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{r^2}\right]$$

la quale mostra che se B è più distante dall'origine di P, anche l'accelerazione radiale $\frac{d^2r}{dt^2}$ di B è maggiore dell'accelerazione radiale $\frac{d^2s}{dt^2}$ di P.

Scelgo allora come condizioni iniziali di B, $r_{t=0} > s_{t=0}$ e $\left(\frac{dr}{dt}\right)_{t=0} > \left(\frac{ds}{dt}\right)_{t=0}$. È facile vedere che in ogni tempo t, si avrà $r > s$, ma s tende all' ∞, quindi anche r tenderà a divenire ∞. c. d. d.

b) Se $M(t)$ diviene ∞ d'ordine non inferiore al 1° rispetto a t per $t = \infty$; allora qualunque siano le condizioni iniziali di B la sua distanza r da A deve divenire inferiore ad ogni quantità assegnata.

In virtù del teorema II basta mostrare che r ammette un limite superiore L. Per $t = 0$ sia B_0 la posizione di B; $r_0 r'_0 \vartheta_0 \vartheta'_0$ i valori di $r r' \vartheta \vartheta'$. Con centro nell'origine A descrivo una sfera S contenente B_0 di raggio $r_1 > \frac{c^2}{K M(0)}$. Se B resta sempre in S, L è $\leq r_1$.

Consideriamo il caso opposto e sia per ora $\left(\frac{dr}{dt}\right)_{t=0} > 0$. Supponiamo dapprima che $\frac{dr}{dt}$ resti sempre > 0 e poniamo per brevità $\left(\frac{dr}{dt}\right)_{r=r_1} = W$.

Nei punti esterni alla sfera S abbiamo $r > \frac{c^2}{K M(0)} > \frac{c^2}{K M(t)}$ e quindi dalla (2) $\frac{d^2 r}{dt^2} < 0$: ne segue che esternamente ad S, $\frac{dr}{dt}$ è decrescente e quindi $\leq W$. Se indichiamo con t il tempo impiegato da B per giungere alla distanza $r (> r_1)$ sarà perciò $t \geq \frac{r - r_1}{W}$, e quindi

$$M(t) \geq M\left(\frac{r - r_1}{W}\right).$$

Integriamo la (3) col teorema della media; come è lecito, perchè per ipotesi $\frac{dr}{dt}$ è sempre > 0. Si ha con brevi calcoli

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{c^2}{r^2}\right]_{r_1}^{r} \leq -K \int_{r_1}^{r} \frac{M\left(\frac{r - r_1}{W}\right)}{r^2}\, dr$$

essa ci mostra che r non può crescere indefinitamente: infatti mentre il primo membro, essendo r_1 fisso, non può scendere al di sotto di un certo valore negativo, il secondo membro crescendo r tende verso $-\infty$.

La r dunque in questa ipotesi ha un limite superiore.

Discutiamo ora l'ipotesi contraria e supponiamo che $\frac{dr}{di}$ inizialmente > 0 divenga 0 per $r = R$.

Rivolgendo la traiettoria la concavità all'origine nell'istante successivo sarà $\frac{dr}{dt} < 0$, cioè r comincierà a decrescere fino ad un certo valore ϱ per poi eventualmente aumentare.

Sia a un valore intermedio tra R e ϱ e $\left(\frac{dr}{dt}\right)_{a_1}$ $\left(\frac{dr}{dt}\right)_{a_2}$ i valori di $\frac{dr}{dt}$ quando r passa per a diminuendo o crescendo. Siano t_1 e t_2 i tempi corrispondenti. Integrando la (3) tra t_1 e t_2 ho

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2_{a_2} - \left(\frac{dr}{dt}\right)^2_{a_1}\right] = -\mathrm{K}\int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{M}(t)}{r^2}\frac{dr}{dt}\,dt\,.$$

Il secondo membro è < 0 essendo $\mathrm{M}(t)$ crescente e $t_2 > t_1$; infatti la parte positiva dell'integrale supera la parte negativa. Ne segue che

$$\left|\left(\frac{dr}{dt}\right)_{a_1}\right| < \left|\left(\frac{dr}{dt}\right)_{a_2}\right|.$$

Cioè tornando eventualmente r a crescere la $\frac{dr}{dt}$ riprende valori minori in valore assoluso degli antichi. Ma $\left(\frac{dr}{dt}\right)_{r=\mathrm{R}} = 0$; dunque tornando r a crescere, la $\frac{dr}{dt}$ deve annullarsi prima che r abbia ripreso il valore R. Il 2° massimo è quindi minore del 1°, il 3° minore del 2° ecc. Ne segue che $\mathrm{L} = \mathrm{R}$.

Finora abbiamo supposto $\left(\frac{dr}{dt}\right)_{t=0} > 0$; se al contrario si ha $\left(\frac{dr}{dt}\right)_{t=0}$ la r decrescerà fino ad un certo valore per poi eventualmente tornare a crescere ripetiamo allora il ragionamento precedente. Così pure se $\left(\frac{dr}{dt}\right)_{t=0} = 0$.

Resta dunque dimostrato che in ogni caso r ammette un limite superiore L; e quindi pel teorema II che crescendo t deve divenire $< \sigma$.

Soluzione generale col metodo della stella di Mittag Leffler.

Nel piano complesso T essendo $r > 0$ per ogni valore reale di t, ne segue (come nel problema dei tre corpi quando non v'è urto) che l'asse reale dei tempi è tutto interno alla stella di Mittag Leffler.

Conosciute le condizioni iniziali sappiamo svolgere r in serie di polinomî in t.

Anzi dato un valore t_1 del tempo applicando la (4) possiamo conoscere un limite inferiore dei valori che r assume nell'intervallo $0 \leq t \leq t_1$. Conosciamo allora il minimo spessore che la stella che racchiude l'asse reale assume nell' intervallo nominato. Applicando i metodi generali riusciamo a dare allo sviluppo in serie l'uniforme convergenza, e quindi possiamo conoscere per $0 \leq t \leq t_1$ il valore di r a meno di un errore ε assegnato. La trattazione è analoga a quella usata nel problema dei 3 corpi.

La teoria della stella è stata esposta dal Mittag Leffler in 3 memorie « Sur la représentation analytique d'une fonction monogène » negli Acta Math. (Band 23-24).

Il senatore prof. V. Volterra ne ha fatto un'ingegnosa applicazione al moto di un punto attratto da più centri fissi posti in linea retta, in una Nota inserita nel vol. XXXIV degli Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino.

Applicazioni astronomiche.

Nella teoria delta luna, studiata da Oppolzer, chiamando con $M(t)$ la somma delle masse terrestri e lunari pongo $M(t) = \alpha + \beta t$; od anche, essendo β estremamente piccolo, $M(t) = \alpha + \gamma \vartheta$ dove γ è una costante da sceglìersi opportunamente e ϑ cresce da 0 ad ∞.

Dalla (1) e (2) con semplicissime traformazioni ho

$$\frac{d}{dr}\left[\mathrm{K}\alpha - \frac{c^2}{r} + r^2 \frac{d^2 r}{dt^2}\right] = -\gamma \mathrm{K} \frac{c}{r^2} \frac{dt}{dr}$$

e, poichè anche γ è piccolissima, sostituisco $\frac{dt}{dr}$ con un suo valore approssimato, quale si avrebbe se M fosse costante. Ho allora facilmente

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{c^2}{r^3} - \frac{\alpha \mathrm{K}}{r^2} - \gamma \frac{\mathrm{K}}{r^2} \int \frac{c\, dr}{r\sqrt{-c^2 + 2\alpha \mathrm{K} r - 2hr^2}} .$$

Il problema è così ricondotto alle quadrature: conosciuto $r(t)$ la (1) da ϑ.

Abbiamo così una soluzione approssimata valida per i bisogni astronomici, e possiamo facilmente calcolare le pertubazioni del moto lunare prodotte da eventuali aumenti della massa terrestre; la formola qui trovata è molto più semplice di quella data dall'Oppolzer.

Dal teorema di Gyldèn segue che se la quantità di materia che cade annualmente sul sole restasse costante tutti i pianeti dovrebbero cadere sul sole stesso: noi abbiamo dimostrato che in tal caso dovrebbero cadere anche tutte le comete. Ciò invece non avverrebbe se la massa solare crescesse per es. con la legge $a + b\sqrt{t}$. Prescindiamo, s'intende, dalle attrazioni stellari.