ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVIII.

1911

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XX.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1911

Matematica. — *Applicazione dell'algebra delle funzioni permutabili al calcolo delle funzioni associate.* Nota di G. C. EVANS, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

1. Abbiamo considerato in una Nota precedente (¹) il problema del calcolo del nucleo dell'equazione risolvente per una data equazione integrale. In questa Nota si continua lo stesso argomento per mezzo della teoria delle funzioni permutabili di prima specie del prof. Volterra, facendo uso di certe funzioni di nullità (²).

Colla solita terminologia chiameremo associate le due funzione $K(x,y)$, $k(x,y)$ se sussiste fra loro la ben nota relazione di Volterra

$$K(x,y)+k(x,y)=\int_y^x K(x,\xi)\,k(\xi,y)\,d\xi. \tag{1}$$

Questa relazione (*a*) è reciproca, (*b*) determina unicamente una delle due funzioni se l'altra viene data, e (*c*) esige che se una è nucleo di una data equazione integrale l'altra sia nucleo della sua equazione risolvente.

Date le funzioni continue

$$K_1(x,y),\, K_2(x,y),\, \dots,\, K_m(x,y);$$

supponiamo di conoscere le loro funzioni associate

$$k_1(x,y),\, k_2(x,y),\, \dots,\, k_m(x,y),$$

e formiamo per mezzo del prodotto simbolico

$$F(x,y)\,G(x,y)=\int_y^x F(x,\xi)\,G(\xi,y)\,d\xi \tag{2'}$$

due funzioni razionali intere arbitrarie

$$\begin{aligned} K(x,y) &= P(K_1,K_2,\dots,K_m\,;\,k_1,k_2,\dots,k_m)\\ k(x,y) &= Q(K_1,K_2,\dots,K_m\,;\,k_1,k_2,\dots,k_m). \end{aligned} \tag{2}$$

Cercheremo delle condizioni sulle P, Q in modo che le funzioni $K(x,y)$, $k(x,y)$ siano associate, cioè che si abbia l'equazione (1).

2. Consideriamo il caso nel quale le m funzioni $K_1, K_2, \dots, K_m$ sono permutabili fra loro. Da questa ipotesi segue che tutte le funzioni $K_1, K_2, \dots, K_m\,;\, k_1, k_2, \dots, k_m\,;\, K, k$ sono permutabili fra loro, e si avrà il teorema:

(¹) Rend. della R. Accanemia dei Lincei, vol. XX, ser. 4ª, 5 novembre 1911.

(²) Evans, *Sopra l'algebra delle funzioni permutabili*. Atti della R. Accademia dei Lincei, vol. VIII, marzo 1911, pag. 6.

TEOREMA. *Se* $k_1, k_2, \ldots, k_m$ *sono le funzioni associate alle funzioni* $K_1, K_2, \ldots, K_m$ *rispettivamente, le quali ultime sono permutabili fra loro, i due polinomi simbolici*

$$K = P(K_1, K_2, \ldots, K_m \;;\; k_1, k_2, \ldots, k_m)$$
$$k = Q(K_1, K_2, \ldots, K_m \;;\; k_1, k_2, \ldots, k_m)$$

più generali che siano possibili tali che la funzione $k(x, y)$ *sia associata alla funzione* $K(x, y)$ *si possono scrivere per mezzo delle formule simboliche*

$$K = 1 - (1 - K_1)^{p_1}(1 - K_2)^{p_2} \ldots (1 - K_m)^{p_m}(1 - k_1)^{q_1}(1 - k_2)^{q_2} \ldots (1 - k_m)^{q_m}$$
$$k = 1 - (1 - K_1)^{q_1}(1 - K_2)^{q_2} \ldots (1 - K_m)^{q_m}(1 - k_1)^{p_1}(1 - k_2)^{p_2} \ldots (1 - k_m)^{p_m}$$

dove le $p_1, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_m$ ***sono numeri interi, positivi o nulli.***

Si può inoltre aggiungere:

È sempre possibile ridurre le $p_i\, q_i$ *in modo che si abbia* $p_i = 0$ *o* $q_i = 0$ *per* $i = 1, 2, \ldots, m$.

In questo teorema le moltiplicazioni simboliche si spiegano colle (2′) e colla definizione seguente [1]:

$$(2'') \qquad \{1 - F(x, y)\}\{1 - G(x, y)\} = \\ = 1 - F(x, y) - G(x, y) + \int_y^x F(x, \xi)\, G(\xi, y)\, d\xi .$$

3. Siccome le funzioni $K_1, K_2, \ldots, K_m$ sono arbitrarie possiamo prenderle tali che s'annullino tutte quando si ha $x = y$. Ne segue che le $k_1, k_2, \ldots, k_m$, si annulleranno per $x = y$, e quindi che lo stesso accade per le funzioni K, k, le quali, come si vede facilmente, ponendo $K_1 = K_2 = \cdots = K_m = 0$, non possono contenere termini di grado nullo. Perciò facendo le trasformazioni

$$(3) \qquad \begin{array}{ll} \alpha_i = 1 - K_i & \alpha = 1 - K \\ \beta_i = 1 - k_i & \beta = 1 - k \end{array}$$

si avrà che tutte le funzioni $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$, α, β saranno funzioni non di nullità, e la moltiplicazione soddisferà a tutti i postulati dell'algebra usuale [2].

Le equazioni (2) si scriveranno nella forma seguente:

$$(4) \qquad \begin{array}{l} \alpha = R(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \;;\; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m) \\ \beta = S(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \;;\; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m) \end{array}$$

(1) Per le definizioni (2′) e (2″) vedi V. Volterra: *Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali*. Rend. della R. Accademia dei Lincei, ser. 5ª, vol. XIX, 1° sem., febbraio 1910, §§ 1 e 2.

(2) Evans, loc. cit., §§ 4-16.

dove sono le R, S, dei nuovi polinomii; e la relazione di Volterra si scriverà nella forma molto semplice

$$(5) \qquad \alpha\beta = 1 .$$

Avremo dunque che

$$(5') \qquad \alpha\beta = 1 \quad , \quad \alpha_i\beta_i = 1 \quad \text{per } i = 1, 2, \dots, m ,$$

$$\mathrm{R}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \; ; \; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m) = \frac{1}{\alpha_1^{h_1}\alpha_2^{h_2}\dots\alpha_m^{h_m}} \mathrm{R}_1(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$$

$$\mathrm{S}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \; ; \; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m) = \frac{1}{\alpha_1^{g_1}\alpha_2^{g_2}\dots\alpha_m^{g_m}} \mathrm{S}_1(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$$

dove le funzioni $\mathrm{R}_1 \mathrm{S}_1$ sono ancora dei nuovi polinomi, ma nelle sole α_i, e finalmente che

$$\frac{\mathrm{R}_1(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)}{\alpha_1^{h_1}\alpha_2^{h_2}\dots\alpha_m^{h_m}} = \frac{\alpha_1^{g_1}\alpha_2^{g_2}\dots\alpha_m^{g_m}}{\mathrm{S}_1(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)}$$

ossia

$$(6) \qquad \mathrm{R}_1(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m), \mathrm{S}_1(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = \alpha_1^{g_1+h_1}\alpha_2^{g_2+h_2}\dots\alpha_m^{g_m+h_m} .$$

I due membri di questa equazione sono polinomi eguali di valore e perciò sono eguali di forma [1] e hanno eguali i loro coefficienti corrispondenti. Quindi si ha che

$$\mathrm{R}_1(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = \alpha_1^{r_1}\alpha_2^{r_2}\dots\alpha_m^{r_m}$$

$$\mathrm{S}_1(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = \alpha_1^{g_1+h_1-r_1}\alpha_2^{g_2+h_2-r_2}\dots\alpha_m^{g_m+h_m-r_m}$$

nelle quali espressioni le r_i sono numeri interi tali che $r_i \geqq 0$, $g_i + h_i - r_i \geqq 0$, per $i = 1, 2, \dots, m$.

Ritornando alle R, S vediamo che esse si possono ridurre alle forme

$$\mathrm{R}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \; ; \; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m) = \alpha_1^{r_1-h_1}\alpha_2^{r_2-h_2}\dots\alpha_m^{r_m-h_m}$$

$$\mathrm{S}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \; ; \; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m) = \alpha_1^{h_1-r_1}\alpha_2^{h_2-r_2}\dots\alpha_m^{h_m-r_m}$$

ossia, tenendo conto delle (5'),

$$\mathrm{R}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \; ; \; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m) = \alpha_1^{p_1}\alpha_2^{p_2}\dots\alpha_m^{p_m}\beta_1^{q_1}\beta_2^{q_2}\dots\beta_m^{q_m}$$

$$\mathrm{S}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \; ; \; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m) = \alpha_1^{q_1}\alpha_2^{q_2}\dots\alpha_m^{q_m}\beta_1^{p_1}\beta_2^{p_2}\dots\beta_m^{p_m} ,$$

dove le $p_i\,q_i$ sono numeri interi positivi o nulli tali che $p_i\,q_i = 0$ per $i = 1$,

[1] Evans, loc. cit., §§ 1-5.

$2, \ldots, m$. E quindi ritornando alle variabili K, k, K_i, k_i, avremo come condizioni necessarie che le K, k si possono scrivere nelle forme simboliche

$$
(7) \qquad
\begin{aligned}
K &= 1 - (1 - K_1)^{p_1} (1 - K_2)^{p_2} \ldots (1 - K_m)^{p_m} \\
&\qquad\qquad (1 - k_1)^{q_1} (1 - k_2)^{q_2} \ldots (1 - k_m)^{q_m} \\
k &= 1 - (1 - K_1)^{q_1} (1 - K_2)^{q_2} \ldots (1 - K_m)^{q_m} \\
&\qquad\qquad (1 - k_1)^{p_1} (1 - k_2)^{p_2} \ldots (1 - k_m)^{p_m} .
\end{aligned}
$$

4. Che le formule (7), quando sono scelte arbitrariamente le p_i, purchè soddisfino alle condizioni del teorema, rappresentano veramente funzioni associate segue dalla forma delle stesse (7), perchè soddisfano ovviamente alla equazione (1), anche nel caso generale in cui le funzioni K_i non sono più ristrette ad essere funzioni di nullità. È dunque completata la dimostrazione del teorema.

5. Consideriamo il caso speciale di due funzioni permutabili K_1, K_2 colle loro funzioni associate k_1, k_2. Applicando le (7) si ha il teorema che *le due funzioni* K *e* k *date per le formule simboliche*

$$
(8) \qquad
\begin{aligned}
K &= 1 - (1 - K_1)(1 - K_2) = K_1 + K_2 - K_1 K_2 \\
k &= 1 - (1 - k_1)(1 - k_2) = k_1 + k_2 - k_1 k_2
\end{aligned}
$$

sono associate.

Dalle espressioni (8) si possono generare le espressioni più generali (7), il che si verifica facilmente. Infatti partendo dalle formule (7) applicando la (8) si ha che

$$
\begin{aligned}
&1 - (1 - K_s)(1 - K) = \\
&\qquad 1 - (1 - K_s)(1 - K_1)^{p_1} (1 - K_2)^{p_2} \ldots (1 - K_m)^{p_m} \\
&\qquad\qquad (1 - k_1)^{q_1} (1 - k_2)^{q_2} (1 - k_m)^{q_m} \\
&1 - (1 - k_s)(1 - k) = \\
&\qquad 1 - (1 - k_s)(1 - K_1)^{q_1} (1 - K_2)^{q_2} \ldots (1 - K_m)^{q_m} \\
&\qquad\qquad (1 - k_1)^{p_1} (1 - k_2)^{p_2} (1 - k_m)^{p_m}
\end{aligned}
$$

e anche che

$$
\begin{aligned}
&1 - (1 - k_s)(1 - K) = \\
&\qquad 1 - (1 - k_s)(1 - K_1)^{p_1} (1 - K_2)^{p_2} \ldots (1 - K_m)^{p_m} \\
&\qquad\qquad (1 - k_1)^{q_1} (1 - k_1)^{q_2} \ldots (1 - k_m)^{q_m} \\
&1 - (1 - K_s)(1 - k) = \\
&\qquad 1 - (1 - K_s)(1 - K_1)^{q_1} (1 - K_2)^{q_2} \ldots (1 - K_m)^{q_m} \\
&\qquad\qquad (1 - k_1)^{p_1} (1 - k_2)^{p_2} \ldots (1 - k_m)^{p_m} ,
\end{aligned}
$$

e quindi scegliendo convenientemente la K_s o la k_s possiamo far crescere di un'unità una qualsiasi delle p_i, q_i.

6. Nella Nota sopracitata [1] abbiamo trattato la combinazione dei due nuclei speciali K_1 e $K_2 = -K_1$. Abbiamo veduto che la funzione associata alla funzione

$$K = \int_y^x K_1(x, \xi)\, K_1(\xi, y)\, d\xi = K_1^2$$

è la funzione

$$k = \int_y^x k_1(x, \xi)\, k_2(\xi, y)\, d\xi = k_1 k_2 ,$$

dove k_1 è la funzione associata alla K_1 e k_2 quella associata alla $K_2 = -K_1$.

Però ponendo $K_2 = -K_1$ nell'equazione (8) si avrà che

$$K = K_1^2$$
$$k = k_1 + k_2 - k_1 k_2 .$$

Quindi ricaviamo il fatto che in questo caso

$$k_1 + k_2 = 2\, k_1 k_2$$

e anche che

$$k = \tfrac{1}{2}\,(k_1 + k_2)$$

il che si può verificare direttamente dalle formule iterative per le k_1, k_2. Abbiamo dunque il teorema:

Teorema. *La funzione associata alla funzione* $\int_y^x K(x, \xi)\, K(\xi, y)\, d\xi$ *si può scrivere*

$$\tfrac{1}{2}\,(k(x, y) + k'(x, y)) ,$$

dove $k(x, y)$ *è associata a* $K(x, y)$ *e* $k'(x, y)$ *a* $-K(x, y)$.

7. La questione generale che abbiamo risoluto si può considerare anche dal punto di vista geometrico. Cerchiamo le trasformazioni più generali

$$\begin{aligned} X_i &= P_i(x_1, x_2, \ldots, x_m \,;\, y_1, y_2, \ldots, y_m) \\ Y_i &= Q_i(x_1, x_2, \ldots, x_m \,;\, y_1, y_2, \ldots, y_m) \end{aligned} \qquad i = 1.2, \ldots, n ,$$

tali che si abbia

$$X_i Y_i = X_i + Y_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

[1] A pag. 455. Il fatto che $k = k_1 k_2$ si può ricavare in modo diretto. Colla notazione simbolica si ha

$$k_1 = -K_1/(1 - K_1),\; k_2 = K_1/(1 + K_1)$$

e perciò

$$k_1 k_2 = -K_1^2/(1 - K_1^2),$$

il che dice che la $k_1 k_2$ è associata alla K_1^2. Sulla corrispondenza dei problemi algebrici e integrali, vedi V. Volterra. Rend. della R. Acc. dei Lincei, serie 5ª, vol. XIX, 20 febbraio 1910; e vol. XX, 6 agosto 1911.

quando si ha

$$x_i y_i = x_i + y_i \qquad i = 1, 2, \dots, m,$$

e

$$X_i = Y_i = 0 \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

quando si ha

$$x_i = y_i = 0, \qquad i = 1, 2, \dots, m,$$

essendo le P_i, Q_i funzioni razionali intere delle variabili x_i, y_i.

Si vede subito dall'analisi dell'articolo 3, che quando si ha $x_i y_i = = x_i + y_i$ per $i = 1, 2, \dots, m$ le trasformazioni più generali di questa specie devono ridursi alle forme

$$P'_i = 1 - a_i(1 - x_1)^{p_1^i}(1 - x_2)^{p_2^i} \dots (1 - x_m)^{p_m^i}$$
$$(1 - y_1)^{q_1^i}(1 - y_2)^{q_2^i} \dots (1 - y_m)^{q_m^i}$$

$$Q'_i = 1 - \frac{1}{a_i}(1 - y_1)^{p_1^i}(1 - y_2)^{p_2^i} \dots (1 - y_m)^{p_m^i}$$
$$(1 - x_1)^{q_1^i}(1 - x_2)^{q_2^i} \dots (1 - x_m)^{q_m^i}$$

in cui $p_s^i q_s^i = 0$ per s, i qualsiasi, e le a_i sono delle costanti arbitrarie, purchè diverse dallo zero. E quindi per una generalizzazione di un teorema del Noether dovuta al Severi (¹) si ha che le trasformazioni più generali, polinomi, si possono scrivere come le seguenti:

$$X_i = \sum_{s=1}^{m} \{(x_s y_s - x_s - y_s) H_{si}\} + P'_i \left[1 + \sum_{s=1}^{m} \{(x_s y_s - x_s - y_s) H'_{si}\} \right]$$

$$Y_i = \sum_{s=1}^{m} \{(x_s y_s - x_s - y_s) L_{si}\} + Q'_i \left[1 + \sum_{s=1}^{m} \{(x_s y_s - x_s - y_s) L'_{si}\} \right]$$

$$i = 1, 2, \dots, n,$$

in cui le $H_{si}, H'_{si}, L_{si}, L'_{si}$ sono funzioni razionali intere arbitrarie.

Il problema geometrico ammette delle generalizzazioni ovvie.

8. Consideriamo finalmente il caso generale in cui le funzioni K_i non sono sottomesse a nessuna condizione di permutabilità. Il polinomio P deve essere tale che, scelte le K_i permutabili, esso si riduca alla forma data dall'equazione (7). Un tale polinomio

$$P = 1 - (1 - K_{i_1})^{p_1}(1 - k_{s_1})^{q_1}(1 - K_{i_2})^{p_2}(1 - k_{s_2})^{q_2} \dots (1 - K_{i_1})^{p_l}(1 - k_{s_l})^{p_l}$$

(¹) F. Severi, *Rappresentazione di una forma qualunque per combinazione lineare di più altre.* Rend. della R. Accademia dei Lincei, vol. XI, ser. 5ª, 1° sem., 2 febbraio 1902. Nel nostre caso di uno spazio di $2n + 1$ coordinate omogenee le m ipersuperficie sono cilindri che si tagliano in una varietà priva di parti multiple.

in cui nè le K_i, scelte fra le $K_1, K_2, \dots, K_m$, nè le k_s, scelte fra le $k_1, k_2, \dots, k_m$, sono necessariamente tutte diverse fra loro, ma sono tali che $K_{i_r} \mp K_{s_r}$ per $r = 1, 2, \dots, z$, e in cui le $p_1, p_2, \dots, p_z$, $q_1, q_2, \dots, q_z$ sono numeri interi qualsiasi, positivi o nulli. Infatti le equazioni

$$(9) \quad \begin{aligned} K &= 1 - (1 - K_{i_1})^{p_1} (1 - k_{s_1})^{q_1} (1 - K_{i_2})^{p_2} (1 - k_{s_2})^{q_2} \dots \\ &\qquad\qquad (1 - K_{i_l})^{p_l} (1 - k_{s_l})^{q_l} \\ k &= 1 - (1 - K_{s_l})^{q_l} (1 - k_{i_l})^{p_l} \dots \\ &\qquad (1 - K_{s_2})^{q_2} (1 - k_{i_2})^{p_2} (1 - K_{s_1})^{q_1} (1 - K_{i_1})^{p_1} \end{aligned}$$

dànno ovviamente due funzioni associate, essendo le K_i delle funzioni continue qualsiasi. Ma non è evidente che queste siano le sole forme possibili.

Anche qui dalle formule particolari nel caso di due funzioni

$$(10) \quad \begin{aligned} K &= K_1 + K_2 - K_1 \,.\, K_2 \\ k &= k_1 + k_2 - k_2 \,.\, k_1 \end{aligned}$$

si possono generare quelle generali (9). Applicazioni interessanti si hanno delle (10) scegliendo le funzioni $K_1 K_2$ dalle otto funzioni $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\varphi(y)$, $\psi(y)$, e le loro funzioni associate.

Matematica. — *Su le funzioni ordinatrici delle funzioni reali di una o più variabili reali.* Nota di Filippo Sibirani, presentata dal Socio Somigliana.

1. Il prof. Somigliana si è occupato in due Note inserite in questi Rendiconti [1] della definizione e costruzione di funzioni non decrescenti che prendono tutti i valori di una assegnata funzione reale limitata continua di una variabile reale in un dato intervallo $a \dots b$. Tali funzioni si presentano nella soluzione di un problema di idrostatica.

Riassumiamo brevemente i suoi risultati. Diviso l'intervallo $a \dots b$ in parti $\delta_1 \delta_2 \dots \delta_n$ nelle quali la data funzione $f(x)$ abbia i minimi $m_1 m_2 \dots m_n$ e i massimi $M_1 M_2 \dots M_n$, si definisca una funzione $\psi_n(x)$ che in $\delta_1 \delta_2 \dots \delta_n$ prende rispettivamente i valori $m'_1 \leq m'_2 \leq \dots \leq m'_n$ essendo questo il gruppo ordinato dei minimi $m_1 m_2 \dots m_n$ e nei punti di divisione di due intervalli $\delta_i \delta_{i+1}$ il valore $\frac{1}{2}(m_i + m_{i+1})$; ed ancora si definisca una funzione $\Psi_n(x)$ che negli stessi intervalli prende i valori $M'_1 \leq M'_2 \leq \dots \leq M'_n$ essendo questo il gruppo ordinato dei massimi $M_1 M_2 \dots M_n$, e nei punti di separazione di $\delta_i \delta_{i+1}$ il valore $\frac{1}{2}(M'_i + M'_{i+1})$.

[1] *Sulle funzioni reali di una variabile*, vol. VIII, ser. 5ª, 1° sem.; *Considerazioni sulle funzioni ordinate*, vol. VIII, ser. 5ª, 2° sem.