ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVIII.

1911

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XX.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1911

in cui nè le K_i, scelte fra le $K_1, K_2, \dots, K_m$, nè le k_s, scelte fra le $k_1, k_2, \dots, k_m$, sono necessariamente tutte diverse fra loro, ma sono tali che $K_{i_r} \neq K_{s_r}$ per $r = 1, 2, \dots, z$, e in cui le $p_1, p_2, \dots, p_z$, $q_1, q_2, \dots, q_z$ sono numeri interi qualsiasi, positivi o nulli. Infatti le equazioni

$$
\begin{aligned}
K &= 1 - (1 - K_{i_1})^{p_1} (1 - k_{s_1})^{q_1} (1 - K_{i_2})^{p_2} (1 - k_{s_2})^{q_2} \dots \\
&\qquad\qquad (1 - K_{i_l})^{p_l} (1 - k_{s_l})^{q_l} \\
k &= 1 - (1 - K_{s_l})^{q_l} (1 - k_{i_l})^{p_l} \dots \\
&\qquad\qquad (1 - K_{s_2})^{q_2} (1 - k_{i_2})^{p_2} (1 - K_{s_1})^{q_1} (1 - K_{i_1})^{p_1}
\end{aligned}
\tag{9}
$$

dànno ovviamente due funzioni associate, essendo le K_i delle funzioni continue qualsiasi. Ma non è evidente che queste siano le sole forme possibili.

Anche qui dalle formule particolari nel caso di due funzioni

$$
\begin{aligned}
K &= K_1 + K_2 - K_1 \, K_2 \\
k &= k_1 + k_2 - k_2 \, k_1
\end{aligned}
\tag{10}
$$

si possono generare quelle generali (9). Applicazioni interessanti si hanno delle (10) scegliendo le funzioni $K_1 K_2$ dalle otto funzioni $\varphi(x), \psi(x), \varphi(y), \psi(y)$, e le loro funzioni associate.

Matematica. — *Su le funzioni ordinatrici delle funzioni reali di una o più variabili reali.* Nota di Filippo Sibirani, presentata dal Socio Somigliana.

1. Il prof. Somigliana si è occupato in due Note inserite in questi Rendiconti [1] della definizione e costruzione di funzioni non decrescenti che prendono tutti i valori di una assegnata funzione reale limitata continua di una variabile reale in un dato intervallo $a \dots b$. Tali funzioni si presentano nella soluzione di un problema di idrostatica.

Riassumiamo brevemente i suoi risultati. Diviso l'intervallo $a \dots b$ in parti $\delta_1 \delta_2 \dots \delta_n$ nelle quali la data funzione $f(x)$ abbia i minimi $m_1 m_2 \dots m_n$ e i massimi $M_1 M_2 \dots M_n$, si definisca una funzione $\psi_n(x)$ che in $\delta_1 \delta_2 \dots \delta_n$ prende rispettivamente i valori $m'_1 \leq m'_2 \leq \dots \leq m'_n$ essendo questo il gruppo ordinato dei minimi $m_1 m_2 \dots m_n$ e nei punti di divisione di due intervalli $\delta_i \delta_{i+1}$ il valore $\frac{1}{2}(m_i + m_{i+1})$; ed ancora si definisca una funzione $\Psi_n(x)$ che negli stessi intervalli prende i valori $M'_1 \leq M'_2 \leq \dots \leq M'_n$ essendo questo il gruppo ordinato dei massimi $M_1 M_2 \dots M_n$, e nei punti di separazione di $\delta_i \delta_{i+1}$ il valore $\frac{1}{2}(M'_i + M'_{i+1})$.

[1] *Sulle funzioni reali di una variabile*, vol. VIII, ser. 5ª, 1° sem.; *Considerazioni sulle funzioni ordinate*, vol. VIII, ser. 5ª, 2° sem.

Definita una legge di divisione di $a \dots b$ in modo che per n tendente all'infinito gli intervalli parziali $\delta_1\, \delta_2 \dots \delta_n$ tendano uniformemente allo zero, si dimostra che se $\Psi_n(x)$ tende ad una funzione limite determinata $\psi(x)$, ad essa pure tande la $\psi_n(x)$ ed una qualsivoglia funzione costruita come le ψ_n e Ψ_n, salvo a prendere, in luogo dei massimi e dei minimi, n valori di $f(x)$ scelti comunque negli intervalli detti. Questa funzione limite, se esiste, non dipende dunque dalla scelta dei valori di $f(x)$ negli intervalli, ma non è indipendente dalla legge di divisione di $a \dots b$.

Invece delle funzioni ψ_n e Ψ_n di dianzi, si definisca una funzione $\varphi_n(x)$ nel seguente modo: siano $\delta_1\, \delta_2 \dots \delta_n$ gli intervalli in cui $a \dots b$ è decomposto, $f(x_1)\, f(x_2) \dots f(x_n)$ n valori scelti di $f(x)$ in ciascun intervallo: siano $f(x'_1)$ $f(x'_2) \dots f(x'_n)$ gli stessi valori ordinati in ordine non decrescente, $\delta'_1\, \delta'_2 \dots \delta'_n$ gli intervalli corrispondenti. Si ricomponga $a \dots b$ coi segmenti $\delta'_1\, \delta'_2 \dots \delta'_n$ succedentisi nell'ordine scritto: la funzione $\varphi_n(x)$ è quella che ha nei detti segmenti i valori $f(x'_1)\, f(x'_2) \dots f(x'_n)$. Sotto certe condizioni è dimostrato che al tendere di n all'infinito $\varphi_n(x)$ tende ad una funzione non decrescente che prende tutti i valori di $f(x)$ e di più il suo integrale in $a \dots b$ ha lo stesso valore dell'integrale di $f(x)$ pure in $a \dots b$.

La dimostrazione dell'esistenza di una tale funzione è fatta dal professore Somigliana nell'ipotesi che $f(x)$ abbia un numero finito di tratti di invariabilità e il gruppo di punti in cui assume uno stesso valore (distinto da quelli assunti nei tratti di invariabilità) abbia un numero finito di gruppi derivati i quali appartengano al gruppo primitivo.

Una tale funzione, detta dal prof. Somigliana funzione *ordinata* di $f(x)$, coincide, nel caso della mancanza di tratti di invariabilità, con la funzione $\Gamma(x)$ definita mediante le relazioni

$$\Gamma(a + l_A) = \Gamma(b - L_A) = f(x_A)$$

ove l_A ed L_A rappresentano la somma di tutti gli intervalli nei quali $f(x)$, supposta continua, è minore, o maggiore, rispettivamente, del valore A che essa assume nei punti x_A.

La seconda delle Note citate contiene ancora una estensione del professore Volterra della definizione di funzione ordinata nel caso che $f(x)$ sia completamente arbitraria: ma io mi limiterò, nel seguito, alla considerazione di funzioni continue.

E precisamente io dimostro l'esistenza di una funzione continua non decrescente che prende tutti i valori di $f(x)$ in $a \dots b$ ed ivi ha l'integrale uguale a quello di $f(x)$, supponendo solamente che quest'ultima sia limitata e continua; a codesta funzione do il nome di *funzione ordinatrice di* $f(x)$. Estendo poi il concetto di funzioni ordinatrici, e ne mostro l'esistenza, per funzioni di più variabili, per le quali c'è luogo a considerare funzioni ordinatrici di specie diverse. Accenno infine ad un problema di idrostatica la cui soluzione è rimandata alla considerazione di funzioni ordinatrici di funzioni di più variabili.

2. Sia $f(x)$ una funzione reale della variabile reale x nell' intervallo $a \dots b$, ivi continua ed avente il minimo μ ed il massimo M.

Di siffatta funzione $f(x)$ esiste una funzione ordinatrice.

Sia A un valore compreso fra μ e M, gli estremi inclusi. Esisterà la misura dell' insieme dei punti in cui $f(x) < A$; codesta misura $m[I\{f(x) < A\}]$ indichiamola, per brevità, con l_A: esisteranno del pari $m[I\{f(x) = A\}]$ e $m[I\{f(x) > A\}]$, cioè le misure degli insiemi dei punti in cui $f(x) = A$ e dei punti in cui $f(x) > A$; le indicheremo con λ_A e L_A.

Si definisca in $a \dots b$ una funzione con le condizioni seguenti: se $\lambda_A = 0$, in $x = a + l_A$ abbia il valore A; se $\lambda_A \neq 0$ la funzione abbia il valore A in $x = a + l_A$, in $x = a + l_A + \lambda_A = b - L_A$ e nei punti intermedî: facendo percorrere ad A tutti i valori da μ a M resta in $a \dots b$ definita una funzione che prende tutti i valori da μ ad M. Essa è non decrescente, giacchè $l_{A'} > l_A$ se $A' > A$; è continua, perchè, se così non fosse, avrebbe in un punto un salto da un valore B ad uno maggiore B' ed in nessun punto assumerebbe i valori compresi fra B e B', ciò che è contraddittorio alla proprietà di ammettere tutti i valori da μ a M.

Ora, se tanto per la funzione così definita quanto per la $f(x)$ si definisce l' integrale esteso all' intervallo $a \dots b$ col metodo di Lebesgue, risulta immediatamente che i due integrali sono uguali.

Con ciò è provato che la funzione dianzi definita è una funzione ordinatrice di $f(x)$; la si può rappresentare con $Of(x)$.

3. Per una funzione continua di due variabili $f(x, y)$ definita in un campo $\varDelta$ quadrabile, ivi avente il minimo μ ed il massimo M, c' è luogo a definire funzioni ordinatrici di due specie: *a*) una funzione ordinatrice rispetto ad entrambe le variabili, che si può rappresentare con $Of(xy)$ continua in $\varDelta$ che assume tutti i valori compresi fra μ ed M, non decrescente nelle direzioni parallele agli assi e tale che

$$\int_{\varDelta} f(xy)\, dx\, dy = \int_{\varDelta} Of(xy)\, dx\, dy\,;$$

b) una funzione ordinatrice rispetto ad x, che si può indicare con $O_x f(xy)$, la quale sia continua in $\varDelta$, in guisa che su ogni retta $y = \overline{y}$ sia $O_x f(x\overline{y})$ una funzione ordinatrice della funzione (di x) $f(x\overline{y})$ e conseguentemente sia

$$\int_{\varDelta} f(xy)\, dx\, dy = \int_{\varDelta} O_x f(xy)\, dx\, dy\,.$$

Il campo $\varDelta$ abbia, in questo caso, per contorno due curve rappresentate da due equazioni $x = \alpha(y)$, $x = \beta(y)$ con $\alpha(y)$ e $\beta(y)$ funzioni continue, ad un valore, nell' intervallo $a \dots b$, essendo a e b le ordinate massima e minima del contorno stesso. Il contorno può, eventualmente, oltre le dette curve comprendere due segmenti sulle rette $y = a$ e $y = b$.

Si può considerare analogamente una funzione ordinatrice rispetto ad y, $\mathrm{O}_y f(xy)$ dotata delle proprietà analoghe a quelle della precedente, fatte sul contorno di $\varDelta$ analoghe ipotesi.

4. Cominciamo con il dimostrare che

di una funzione $f(xy)$ soddisfacente alle condizioni esposte in principio del § 3 esiste una funzione ordinatrice $\mathrm{O}f(xy)$.

Se A è un numero compreso fra μ e M, esisterà la misura superficiale dei punti in cui $f(xy) < \mathrm{A}$, quella dei punti in cui $f(xy) = \mathrm{A}$ e quella dei punti in cui $f(xy) > \mathrm{A}$. Si porrà

$$m_s[\mathrm{I}\{f(xy) < \mathrm{A}\}] = g_{\mathrm{A}} \;;\; m_s[\mathrm{I}\{f(xy) = \mathrm{A}\}] = \gamma_{\mathrm{A}}\;;$$
$$m_s[\mathrm{I}\{f(xy) > \mathrm{A}\}] = \mathrm{G}_{\mathrm{A}}\,.$$

Ora si osservi che se d è un asse, per l'origine degli assi, nel 1° e 3° quadrante, su cui la direzione positiva sia quella che forma con la direzione positiva dell'asse x un angolo acuto, ogni retta r normale a d e che abbia qualche punto in comune con $\varDelta$, dà luogo, insieme con la parte del contorno di $\varDelta$ che sta rispetto ad r dalla banda negativa di d, ad uno o più pezzi di $\varDelta$ la somma delle cui aree in valore assoluto è determinata.

Ciò posto, sia r_{A} la retta normale a d che con la parte anzidetta del contorno di $\varDelta$ limita un'area g_{A}. Definiamo in $\varDelta$ una funzione con le seguenti condizioni: se $\gamma_{\mathrm{A}} = 0$, nei punti della retta r_{A} che appartengono a $\varDelta$ la funzione abbia il valore A; se $\gamma_{\mathrm{A}} \neq 0$, nei punti della porzione di $\varDelta$ limitata dalle rette r_{A} e da quella parallela che con la precedente e con il contorno di $\varDelta$ forma l'area γ_{A} e sul contorno di detta porzione, la funzione abbia il valore A. Al variare di A da μ a M, in $\varDelta$ è definita una funzione non decrescente nelle direzioni parallele agli assi, che prende tutti i valori da μ a M.

Essa funzione è continua; per la costanza della funzione sulle rette normali a d, basta provare la continuità nella direzione d. Poichè in questa direzione la funzione è non decrescente, la discontinuità non potrebbe consistere che in un salto da un valore B ad uno maggiore B′ ed allora la funzione non prenderebbe in nessun punto i valori compresi fra B e B′, ciò che non può essere.

La definizione di integrale di campo di Lebesgue applicata alla funzione $f(xy)$ e alla funzione così definita fa vedere che gli integrali estesi a $\varDelta$ delle due funzioni coincidono.

La funzione definita nel modo dianzi esposto è una funzione ordinatrice di $f(xy)$ rispetto ad entrambe le variabili.

5. Veniamo ora alla dimostrazione dell'esistenza della funzione ordinatrice rispetto ad x: analoga dimostrazione vale per la funzione ordinatrice rispetto ad y. Il campo $\varDelta$ soddisfa alle condizioni del § 3, b).

Su ogni retta $y=\overline{y}$ la funzione $f(xy)$ diviene $f(x\overline{y})$ funzione della sola x; come tale sia $\mathrm{O}f(x\overline{y})$ la funzione ordinatrice costruita come è detto al § 2. Se tale costruzione si fa per tutte le rette parallele ad x condotte per i punti dell'asse y di ordinate comprese fra a e b, viene a definirsi in $\varDelta$ una funzione $\Phi(xy)$ la quale prende tutti i valori da μ a M e che soddisfa alla relazione

$$\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(xy)\,dx = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \Phi(xy)dx,$$

da cui discende tosto

$$\int_{\varDelta} f(xy)\,dx\,dy = \int_{\varDelta} \Phi(xy)\,dx\,dy.$$

Resta da provarsi che $\Phi(xy)$ è continua in $\varDelta$, per vedere che essa funzione è una funzione ordinatrice di $f(xy)$ rispetto ad x.

A quest'uopo premettiamo qualche semplice considerazione.

Se $\varphi(x)$ è una funzione continua definita in un intervallo $\alpha\ldots\beta$ denotiamo con $l_{\mathrm{A}}^{\varphi}, \lambda_{\mathrm{A}}^{\varphi}, \mathrm{L}_{\mathrm{A}}^{\varphi}$ i numeri $l_{\mathrm{A}}, \lambda_{\mathrm{A}}, \mathrm{L}_{\mathrm{A}}$ del § 2 relativi alla funzione $\varphi(x)$ e denotiamo con $x_{\mathrm{A}-0}^{\varphi}$ il punto $\alpha+l_{\mathrm{A}}^{\varphi}$ e con $x_{\mathrm{A}+0}^{\varphi}$ il punto $\alpha+l_{\mathrm{A}}^{\varphi}+\lambda_{\mathrm{A}}^{\varphi}=\beta-\mathrm{L}_{\mathrm{A}}^{\varphi}$.

Allora, per una qualunque funzione $\chi(x)$ compresa fra $\varphi(x)-\sigma$ e $\varphi(x)+\sigma$, si avrà

$$x_{\mathrm{A}-0}^{\varphi+\sigma} < x_{\mathrm{A}-0}^{\chi} < x_{\mathrm{A}-0}^{\varphi-\sigma}$$
$$x_{\mathrm{A}+0}^{\varphi+\sigma} < x_{\mathrm{A}+0}^{\chi} < x_{\mathrm{A}+0}^{\varphi-\sigma}$$

ossia

$$x_{(\mathrm{A}-\sigma)-0}^{\varphi} < x_{\mathrm{A}-0}^{\chi} < x_{(\mathrm{A}+\sigma)-0}^{\varphi}$$
$$x_{(\mathrm{A}-\sigma)+0}^{\varphi} < x_{\mathrm{A}+0}^{\chi} < x_{(\mathrm{A}+\sigma)+0}^{\varphi}.$$

Se ne deduce che la $\chi(x)$ nell'intervallo $x_{(\mathrm{A}-\sigma)+0}^{\varphi}\ldots x_{(\mathrm{A}+\sigma)-0}^{\varphi}$ è compresa fra $\mathrm{A}-2\sigma$ ed $\mathrm{A}+2\sigma$.

Veniamo ora alla dimostrazione che abbiamo in vista.

Sia $x_0 y_0$ un punto interno a $\varDelta$, in cui $\Phi(x_0 y_0)=\mathrm{A}$. Sopra ciascuna retta $y=y'$ la $\Phi(xy')$ e la $f(xy')$ diventano funzioni di x nell'intervallo $\alpha(y')\ldots\beta(y')$. Sulla retta $y=y_0$ nell'intervallo $\alpha(y_0)\ldots\beta(y_0)$ siano $x_{\mathrm{A}-0}, y_0$,

x_{A+0, y_0} rispetto alle funzioni $f(xy_0)$ o $\Phi(xy_0)$ le ascisse dei punti analoghi a quelli di ascissa $x^{\varphi}_{A-0}, x^{\varphi}_{A+0}$ nell'intervallo $a \dots b$ rispetto alla funzione $\varphi(x)$ di dianzi.

Sia σ un numero prefissato piccolo ad arbitrio e sia η un numero inferiore a $x_0 - x_{\left(A-\frac{\sigma}{4}\right)+0, y_0}$ e a $x_{\left(A-\frac{\sigma}{4}\right)-0, y_0} - x_0$: esisterà un numero positivo δ così fatto che entro la striscia limitata dalle rette $y = y_0 - \delta$, $y = y_0 + \delta$ siano soddisfatte le seguenti condizioni: le oscillazioni di $\alpha(y)$ e $\beta(y)$ sono inferiori a $\frac{\eta}{4}$; su ogni retta $x =$ costante, la oscillazione di $f(xy)$ è inferiore a $\frac{\sigma}{4}$.

Se tutte le funzioni $f(xy')$ e $\Phi(xy')$ fossero definite nello stesso intervallo di valori x, $\alpha(y_0) \dots \beta(y_0)$, essendo per ogni y' fra $y_0 - \delta$ e $y_0 + \delta$ $f(xy')$ compreso fra $f(xy_0) - \frac{\sigma}{4}$ e $f(xy_0) + \frac{\sigma}{4}$, e tenendo conto della osservazione premessa, si dedurrebbe senza pena che nel rettangolo limitato dalle rette $y = y_0 - \delta$, $y = y_0 + \delta$, $x = x_0 - \eta$, $x = x_0 + \eta$ la $\Phi(xy)$ non oscillerebbe per più di σ. Tenendo conto della differenza di ampiezza degli intervalli $\alpha(y') \dots \beta(y')$ rispetto all'intervallo $\alpha(y_0) \dots \beta(y_0)$, si può asserire che entro il rettangolo limitato dalle rette $y = y_0 - \delta$, $y = y_0 + \delta$, $x = x_0 - \frac{\eta}{2}$, $x = x_0 + \frac{\eta}{2}$ la $\Phi(xy)$ oscilla per meno di σ.

Con ciò è provata la continuità di $\Phi(xy)$ in $x_0 y_0$. Si vede facilmente come debba modificarsi leggermente la dimostrazione nel caso che $x_0 y_0$ sia sul contorno di Δ.

La $\Phi(xy)$ è dunque funzione continua in Δ e perciò, per le già riscontrate sue proprietà, una funzione ordinatrice di $f(xy)$ rispetto ad x.

6. Per una funzione $f(xyz)$ reale di tre variabili reali, limitata, continua in uno spazio Σ avente volume, si possono considerare funzioni ordinatrici di tre specie:

a) una funzione ordinatrice rispetto a tutte e tre le variabili $Of(xyz)$, cioè una funzione continua in Σ, non decrescente nelle direzioni parallele agli assi, che prende tutti i valori di $f(xyz)$ e per la quale si ha

$$\int_{\Sigma} f(xyz)\, dx\, dy\, dz = \int_{\Sigma} Of(xyz)\, dx\, dy\, dz\,;$$

b) una funzione ordinatrice rispetto ad x e y, $O_{xy} f(xyz)$, la,qu ale è continua in Σ e in ogni piano $z = \bar{z}$ si riduce alla funzione $O_{xy} f(xy\bar{z})$ che è ordinatrice rispetto ad entrambe le variabili della funzione (di x e y)

$f(xy\bar{z})$; e conseguentemente (se $\Delta_{\bar{z}}$ è il campo sezione di Σ con $z=\bar{z}$)

$$\int_{\Delta_{\bar{z}}} f(xy\bar{z})\,dx\,dy = \int_{\Delta_{\bar{z}}} \mathrm{O}_{xy} f(xy\bar{z})\,dx\,dy\,;$$

$$\int_{\Sigma} f(xyz)\,dx\,dy\,dz = \int_{\Sigma} \mathrm{O}_{xy} f(xyz)\,dx\,dy\,dz\,.$$

Lo spazio Σ si supporrà tale che ogni piano $z=\bar{z}$ tagli il contorno secondo una curva limitante un'area quadrabile semplicemente connessa.

Analogamente si possono considerare funzioni ordinatrici rispetto a xz e a zy, fatte, nei due casi, ipotesi analoghe, sopra Σ rispetto alle sezioni normali agli assi y e x.

c) una funzione ordinatrice rispetto alla variabile x, $\mathrm{O}_x f(xyz)$, la quale su ogni retta $y=\bar{y}$, $z=\bar{z}$ è funzione ordinatrice della funzione di x $f(x\bar{y}\bar{z})$; conseguentemente su ogni segmento parallelo ad x cogli estremi sul contorno di Σ le funzioni $f(xyz)$ e $\mathrm{O}_x f(xyz)$ hanno lo stesso integrale, come pure hanno lo stesso integrale esteso ad una qualsiasi superficie cilindrica colle generatrici parallele ad x limitata da una curva tracciata sul contorno di Σ ed infine è

$$\int_{\Sigma} f(xyz)\,dx\,dy\,dz = \int_{\Sigma} \mathrm{O}_x f(xyz)\,dx\,dy\,dz\,.$$

Lo spazio Σ si supporrà limitato da due superfici $x=\alpha(yz)$ $x=\beta(yz)$ con α e β funzioni continue, ad un valore, ed eventualmente da una superficie cilindrica a generatrici parallele ad x.

Analogamente si possono considerare funzioni ordinatrici di $f(xyz)$ rispetto ad y o rispetto a z, fatte, nei due casi, ipotesi analoghe per il contorno di Σ.

Le dimostrazioni dell'esistenza delle funzioni ordinatrici delle tre specie si fa seguendo una spontanea generalizzazione dei metodi usati per le funzioni di due variabili.

Su ogni retta $y=\bar{y}$, $z=\bar{z}$ si costruisca della $f(x\bar{z}\bar{y})$ la funzione ordinatrice rispetto ad x come è stato svolto al § 2; si costruisce allora una funzione ordinatrice $\mathrm{O}_x f(xyz)$.

Su ogni piano $z=\bar{z}$ si costruisca la funzione ordinatrice rispetto ad x e y come è svolto al § 5, avendo cura che gli assi d abbiano per tutti i piani la stessa direzione; si dà luogo così ad una funzione $\mathrm{O}_{xy} f(xyz)$.

Facilmente si definisce una $\mathrm{O}f(xyz)$. Siano n_{A}, ν_{A}, N_{A} le misure cubiche degli insiemi dei punti in cui $f(xyz)$ è minore di A, uguale ad A, maggiore di A; sia d un asse, per l'origine degli assi, nel 1° e 7° ottante, orientato in guisa che positiva sia la direzione formante un angolo acuto con la direzione positiva dell'asse x. Se p_{A} è il piano normale a d che con quella parte del contorno di Σ che sta dalla banda negativa di d rispetto a p_A forma un volume di valore assoluto n_A, su questo piano si definisca una funzione $\varphi(xyz)$ avente il valore A. Se $\nu_A \neq 0$, oltre che nel detto piano, anche nel piano parallelo al precedente che con esso stacca da Σ un volume ν_A e nei punti di Σ compresi fra i detti piani, sia pure $\varphi(xyz) = A$: facendo variare A dal minimo al massimo di $f(xyz)$, la $\varphi(xyz)$ è una funzione ordinatrice di $f(xyz)$ rispetto a tutte e tre le variabili.

Per l'analogia delle considerazioni che si debbono fare, lascieremo di sviluppare le dimostrazioni.

Per una funzione reale di n variabili reali $f(x_1\, x_2\, x_3 \dots x_n)$, limitata continua in uno spazio S_n, fatte convenienti ipotesi sul contorno di esso spazio, esistono funzioni ordinatrici di n specie, cioè ordinatrici rispetto a tutte le variabili, rispetto a $n-1$, a $n-2 \dots$ variabili.

7. Osserviamo che nella costruzione della funzione $\mathrm{O}f(xy)$ ordinatrice di $f(xy)$ rispetto ad entrambe le variabili, alle rette r_A si possono sostituire le curve di famiglia di curve $\theta(xy) = c$ delle quali per ogni punto di d ne passi una ed una sola incontrata in un punto solo da ogni parallela agli assi. Del pari, nella costruzione della funzione $\mathrm{O}f(xyz)$ ordinatrice rispetto a tutte e tre le variabili, si può sostituire ai piani p_A normali a d una famiglia di superficie $\theta(xyz) = c$, delle quali per ogni punto di d ne passi una ed una sola incontrata in un sol punto da ogni parallela agli assi.

Infine indichiamo una quistione la cui soluzione è rimandata alla costruzione di una funzione ordinatrice di più variabili: un vaso di forma qualunque contiene un liquido eterogeneo pesante distribuito secondo una legge qualsiasi; trovare la distribuzione di equilibrio stabile, ammettendo che tale distribuzione sia quella in cui nessuna molecola è soprastante ad una di densità minore.

Fisica. — *Misure di velocità di otturatori fotografici.* Nota di Giulio Cesare Trabacchi, presentata dal Socio P. Blaserna.

Se a chi coltiva la tecnica fotografica con intendimenti artistici è sufficiente di conoscere approssimativamente la velocità del proprio otturatore, cui è subordinata la durata di esposizione della lastra, questa velocità deve essere rigorosamente determinata da chi si occupa di fotografia dal punto di vista scientifico.

È noto che, a parte i metodi fotometrici come quelli di A. W. Scott (¹), Weber (²) ed altri simili, i quali richiedono un apprezzamento personale, i metodi più diffusi per queste misure consistono in generale nel fotografare

(¹) Brit. Journal Phot., 1886, pag. 621; Phot. Wochenbl, 1889, S. 13.
(²) Phot. Mitth. 1891, pag. 43.