ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVIII.

1911

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XX.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1911

Sommando con pl dedotto dalla (16), e tenendo presente che ϱ vale 2σ, e che ζ verifica la (14), si ottiene

$$T_0^2 - U_0^2 = (c + pz_0)^2 - (k + \sigma z_0^2)^2 .$$

Le (8), (9) accusano che questa è una relazione identica, perciò dare l, ai fini del problema, è come dare la forza ascensionale $\sqrt{T_0^2 - U_0^2}$, nei punti d'attacco del trave. Quest'apparente paradosso, che potrebbe impensierire i pratici, si spiega benissimo quando si pensi chè è ancora disponibile z_0 cioè la lunghezza della manica d'appendice. Notiamo ancora una volta che si prescinde dalla terza coordinata.

Matematica. — *L'equazione integrale di Volterra di seconda specie con un limite dell'integrale infinito.* Nota del dott. G. C. Evans, presentata dal Corrisp. G. Lauricella.

1. Consideriamo l'equazione integrale con un parametro λ

$$u(x) = \varphi(x) + \lambda \int_x^\infty K(x, \xi)\, u(\xi)\, d\xi , \tag{1}$$

lo studio della quale mi è stato consigliato dal prof. Volterra.

Supponiamo che la funzione $\varphi(x)$ sia continua nel tratto $x \geqq a$, e limitata $(|\varphi(x)| \leqq P_1)$; $K(x, y)$ sia continua nel triangolo corrispondente $a \leqq x \leqq y$, e limitata $(|K(x, y)| \leqq P_2)$, e l'integrale $\int_x^\infty |K(x, \xi)|\, d\xi$ esista. Si ha immediatamente il teorema seguente [1]:

Se oltre le ipotesi già assunte si ha $\int_x^\infty |K(x, \xi)|\, d\xi \leqq M$ *per* $x \geqq a$, *si può trovare un valore* $\lambda_0 \left(\lambda_0 \geqq \frac{1}{M}\right)$ *in modo che per ogni valore di* λ *tale che* $|\lambda| < \lambda_0$ *vi sarà una e una sola soluzione* $u(x)$, *finita e integrabile, dell'equazione* (1).

La soluzione può scriversi nella forma

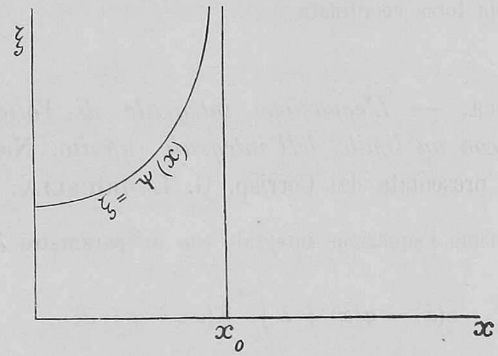
$$u(x) = \varphi(x) - \int_x^\infty k(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi , \tag{2}$$

dove la funzione $k(x, \xi)$, nucleo dell'equazione risolvente, è una funzione continua nel campo $a \leqq x \leqq y$, e finita [2].

[1] Rend. della R. Acc. dei Lincei, vol. XX, serie 5a, 1911, 1° sem., fasc. 9°.
[2] Si veda [1] a pag. 662.

Perchè la soluzione stessa sia continua è necessario aggiungere qualche condizione, cioè o la convergenza uniforme o la continuità dell' integrale $\int_x^\infty |\mathrm{K}(x\,,\xi)|\,d\xi$, o la continuità dell' integrale $\int_x^\infty \mathrm{K}(x\,,\xi)\,f(\xi)\,d\xi$ dove $f(\xi)$ è una funzione arbitraria, però finita e continua.

Un esempio di una soluzione non continua dell'equazione (1) sotto le ipotesi del teorema si dà facilmente. Nella figura, sia $\xi = \psi(x)$ una funzione continua $0 \leqq x \leqq x_0$, tale che si abbia $\psi(x) > x_0$ quando x è mi-



nore di x_0, e $\lim \psi(x) = \infty$ quando x s'avvicina a x_0. Per $\varphi(x)$ e $\mathrm{K}(x\,,\xi)$ prendiamo le due funzioni continue:

$$\varphi(x) = \mathrm{A}$$

$$\mathrm{K}(x\,,\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\xi - \psi(x))\,e^{-(\xi-\psi(x))} & \text{quando si ha } \begin{cases} \xi \geqq \psi(x) \\ x < x_0 \end{cases} \\ 0 & \text{nel campo rimanente.} \end{cases}$$

Si avrà

$$\int_x^\infty |\mathrm{K}(x\,,\xi)|\,d\xi = \tfrac{1}{2} \qquad \text{per } x < x_0$$

$$\int_x^\infty |\mathrm{K}(x\,,\xi)|\,d\xi = 0 \qquad \text{per } x \geqq x_0\,,$$

e quindi si avrà per $\lambda = 1$

$$u(x_0 + 0) = \mathrm{A}$$
$$u(x_0 - 0) = 2\mathrm{A}\,.$$

Senza difficoltà può costruirsi un nucleo continuo in modo che si abbia una soluzione discontinua in ogni porzione, per quanto piccola, del tratto $x \geqq a$.

Si trovano applicazioni del teorema nelle teorie dell'elettrodinamica (¹) e dell'elasticità (²) per il caso della ereditarietà.

2. Si possono facilmente dedurre condizioni sufficienti per fare che sia trascurabile la parte dell'integrale superiore a un certo limite finito x_0. Per questo non bastano in generale le ipotesi del teorema sopra dato, come dimostra l'esempio di una soluzione discontinua sotto quelle condizioni; la equazione approssimativa col limite finito avrebbe sempre come soluzione una funzione continua. La convergenza uniforme dell'integrale $\int_x^\infty |K(x, \xi)|\, d\xi$ nel tratto infinito $x \geqq a$ però costituisce una condizione sufficiente. E nel caso del cappio chiuso (³), dove il nucleo è funzione della differenza $\xi - x$ delle variabili, bastano semplicemente le ipotesi del teorema, perchè ivi si ha che anche il nucleo dell'equazione risolvente è funzione della differenza delle variabili $[k(x, \xi) = k(\xi - x)]$, e quindi che l'integrale $\int_x^\infty |k(x, \xi)|\, d\xi$ converge uniformemente in un tratto qualunque finito. Per conseguenza, fissato un valore X, si può trovare un valore x_0 in modo che l'integrale

$$\int_{x_0}^\infty |k(x, \xi)\, \varphi(\xi)|\, d\xi$$

sia tanto piccolo quanto ci piace per $x \leqq X$.

3. Si trovano pure nella teoria della ereditarietà esempî del sistema di equazioni (³), (⁴):

$$(1') \qquad \sum_{k=1}^{p} a_{s,k}\, u_k(x) = \varphi_s(x) + \lambda_s \int_x^\infty \sum_{k=1}^{p} (K_{s,k}(x, \xi)\, u_k(\xi))\, d\xi\,,$$

$$s = 1, 2, \ldots, p,$$

dove le funzioni $\varphi_s(x)$, $K_{s,k}(x, y)$ sono continue nei proprî campi di variabilità, e limitate, le λ_s sono costanti, per il momento indeterminate, e il determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pp} \end{vmatrix}$$

(¹) V. Volterra, *Sulle equazioni della elettrodinamica*, Rend. della R. Accad. dei Lincei, vol. XVIII, serie 5ª, marzo 1909.

(²) V. Volterra, *Sulle equazioni integro-differenziali dell'elasticità*, Rend. della R. Accad. dei Lincei, vol. XVIII, ser. 5ª, nov. 1909.

(³) Loc. cit. (3), a pag. 207.

è diverso da zero. *Se, oltre queste ipotesi, l'integrale* $\int_x^\infty |K_{s,k}(x, \xi)|\, d\xi$, *quando* $\begin{cases} 1 \leqq s \leqq p \\ 1 \leqq k \leqq p \end{cases}$, *esiste e rimane* $< M$ *per* $x \geqq a$, *si può trovare un valore* λ_0 *in modo tale che se* $|\lambda_s| < \lambda_0$ $(s = 1, 2, \ldots, p)$, *vi sarà un sistema e uno solo, di soluzioni, finite e integrabili, del sistema di equazioni* (1').

Se l'integrale

$$\int_x^\infty |K_{s,k}(x, \xi)|\, d\xi, \quad \text{per} \begin{cases} s = 1, 2, \ldots, p \\ k = 1, 2, \ldots, p, \end{cases}$$

converge, uniformemente rispetto alla x, per $x \geqq a$, si possono prendere le λ_s come delle costanti qualsiasi. E in questo caso tutte le p funzioni del sistema di soluzioni saranno continue, e si potrà trovare un sistema di equazioni approssimativo col limite degli integrali finito.

4. Per dimostrare il teorema si ha solamente da ricorrere ai metodi già usati per dimostrare il teorema del § 1 applicandoli a un altro sistema di equazioni *equivalente* al sistema (1'); cioè un secondo sistema le cui soluzioni sono soluzioni del primo, e viceversa. Questo altro sistema si scrive:

$$(1'') \quad u_s(x) = \sum_{i=1}^{p} b_{is}\,\varphi_i(x) + \int_x^\infty \left\{ \sum_{k=1}^{p} u_k(\xi) \left[\sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, b_{is}\, K_{i,k}(x, \xi) \right] \right\} d\xi,$$

dove le b_{is} sono i cofattori delle a_{is} divisi per il valore del determinante Δ, e perciò sono indipendenti dalle λ_i, e tali che il determinante

$$\frac{1}{\Delta} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{pp} \end{vmatrix}$$

non s'annulla.

Nel caso del sistema (1'), come in quello del sistema col limite degli integrali finito [1], possono invertirsi gli integrali in termini finiti rispetto alle $\varphi_i(x)$. Per questo scopo conviene introdurre un parametro positivo λ e scrivere il sistema (1'') nel seguente modo:

$$(\alpha) \qquad u_s(x) = \psi_s(x) + \lambda \int_x^\infty \sum_{k=1}^{p} \{ G_{s,k}(x, \xi)\, u_k(\xi) \}\, d\xi,$$

[1] V. Volterra, Rend. della R. Accad. dei Lincei, serie 5ª, 1° sem., fasc. 5, 1896.

in cui

$$(\beta)\quad \begin{cases} \psi_s(x) = \sum_{i=1}^{p} b_{is}\, \varphi_i(x) \\ G_{s,k}(x\,,y) = \dfrac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, b_{is}\, K_{i,k}(x\,,y)\,, \end{cases}$$

dove per $|\lambda_i| \leqq \lambda$ si ha

$$\int_x^\infty |G(x\,,\xi)|\, d\xi \leqq M'\,,$$

essendo la M′ indipendente dalla λ. La soluzione per $\lambda < \lambda_0$, dove la λ_0 dipende dalla M′, può scriversi nella forma

$$(2')\quad u_s(x) = \psi_s(x) - \lambda \int_x^\infty \sum_{k=1}^{p} g_{s,k}(x\,,\xi)\, \psi_k(\xi)\, d\xi\,, \qquad s = 1\,, 2\,, \ldots, p\,,$$

in cui

$$\begin{cases} g_{s,k}(x\,,y) = -\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1}\, G^{(n)}_{s,k}(x\,,y) \\ G^{(1)}_{s,k}(x\,,y) = G_{s,k}(x\,,y) \qquad \text{per } n = 1\,, \\ G^{(n)}_{s,k}(x\,,y) = \sum_{k'=1}^{p} \int_x^y G^{(n-i)}_{s,k'}(x\,,\xi)\, G^{(i)}_{k'k}(\xi\,,y)\, d\xi \\ \qquad (\text{quando } i = 1\,, 2\,, \ldots n-1) \text{ per } n > 1\,. \end{cases}$$

Per conseguenza le funzioni $g_{s,k}(x\,,y)$ soddisfano alle equazioni [1]

$$\begin{aligned} g_{s,k}(x\,,y) + G_{sk}(x\,,y) &= \lambda \sum_{k'=1}^{p} \int_x^y G_{s,k'}(x\,,\xi)\, g_{k'k}(\xi\,,y)\, d\xi \\ &= \lambda \sum_{k'=1}^{p} \int_x^y g_{s,k'}(x\,,\xi)\, G_{k'k}(\xi\,,y)\, d\xi\,; \end{aligned}$$

e in virtù di queste sono definite unicamente. Il parametro λ, come risulta dalle (α) (β) e come è facile verificare, sparisce dalle formule precedenti.

6. Nel sistema (1′) non è necessario che le $a_{s,k}$ siano costanti. Possono essere funzioni continue qualsiasi, purchè finite (in valore assoluto minore di una certa costante) e tali che il loro determinante Δ non s'annulli.

[1] Sono in sostanza le equazioni che si trovano nel loc. cit. [7], pag. 183.