ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVIII.

1911

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XX.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1911

Meccanica. — *Sulle deformazioni finite dei solidi elastici isotropi.* Nota II del Corrispondente E. Almansi.

1. Le formule stabilite nella Nota precedente

$$\tau_1 = \frac{1}{(1+a_2)(1+a_3)} \frac{\partial \varphi}{\partial a_1}, \text{ ecc.}, \tag{1}$$

che, supposta nota la funzione $\varphi(a_1, a_2, a_3)$, esprimono le tre tensioni principali mediante gli allungamenti principali a_1, a_2, a_3, permettono di fare qualche considerazione sul valore numerico di una delle costanti d'isotropia: ciò che sarà oggetto della prima parte di questa Nota (§§ 1-3).

Nella teoria ordinaria si hanno le formule

$$\tau_1 = A\{a_1 + k(a_2 + a_3)\}, \text{ ecc.}, \tag{2}$$

ove A è una costante positiva, k una costante compresa fra $-\frac{1}{2}$ ed 1; le quali formule valgono, d'altronde, non per le sole direzioni principali, ma per qualunque terna di direzioni ortogonali, se a_1, a_2, a_3 rappresentano gli allungamenti, e τ_1, τ_2, τ_3 le tensioni normali relative a quelle direzioni. La costante

$$\lambda = \frac{k}{k+1},$$

è il *rapporto di Poisson.* Come è noto, l'ipotesi che le forze elastiche siano forze *centrali* conduce ad attribuire a λ il valore $\frac{1}{4}$, mentre dall'esperienza non risulta che λ abbia precisamente questo valore: per molti corpi esso è anzi più vicino ad $\frac{1}{3}$ che ad $\frac{1}{4}$.

Vediamo se è possibile che le formule (2) siano, almeno per le tre direzioni principali, *esattamente* verificate, vale a dire che esse coincidano colle (1). Dovrà essere:

$$\frac{1}{(1+a_2)(1+a_3)} \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} = A\{a_1 + k(a_2 + a_3)\}, \text{ ecc.};$$

ossia:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_1} = A(1+a_2)(1+a_3)\{a_1 + k(a_2 + a_3)\}, \text{ ecc.}$$

Scriviamo, in luogo di k, $\frac{1}{2}+(k-\frac{1}{2})$. Avremo, scindendo in due parti i secondi membri:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a_1}=\mathrm{A}(1+a_2)(1+a_3)\{a_1+\tfrac{1}{2}(a_2+a_3)\}+$$
$$+\mathrm{A}(k-\tfrac{1}{2})(1+a_2)(1+a_3)(a_2+a_3)\,,\ \text{ecc.}$$

I primi termini nei secondi membri di queste equazioni, sono le derivate, rispetto ad a_1, a_2, a_3, della funzione:

$$\varphi_0=\frac{\mathrm{A}}{2}\{(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)(a_1+a_2+a_3-1)+1\};$$

onde ponendo:

$$(3)\quad \begin{cases}\varphi_1=(1+a_2)(1+a_3)(a_2+a_3)\,,\ \varphi_2=(1+a_3)(1+a_1)(a_3+a_1)\\ \varphi_3=(1+a_1)(1+a_2)(a_1+a_2)\,,\end{cases}$$

sarà:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a_1}=\frac{\partial\varphi_0}{\partial a_1}+\mathrm{A}(k-\tfrac{1}{2})\varphi_1\,,\ \frac{\partial\varphi}{\partial a_2}=\frac{\partial\varphi_0}{\partial a_2}+\mathrm{A}(k-\tfrac{1}{2})\varphi_2\,,$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial a_3}=\frac{\partial\varphi_0}{\partial a_3}+\mathrm{A}(k-\tfrac{1}{2})\varphi_3\,.$$

Poichè $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ non sono le derivate di una stessa funzione rispetto ad a_1, a_2, a_3 (non essendo $\frac{\partial\varphi_2}{\partial a_3}=\frac{\partial\varphi_3}{\partial a_2}$, ecc.), affinchè le equazioni precedenti (supposto A diverso da zero) resultino verificate, dovrà essere $k=\frac{1}{2}$; e perciò:

$$\lambda=\tfrac{1}{3}\,.$$

È questo l'unico valore che può avere il rapporto di Poisson, dato che sussistano le formule (2).

Il potenziale di elasticità sarà la funzione φ_0: funzione nulla per $a_1=a_2=a_3=0$, e positiva, come si può facilmente riconoscere, se tale è la costante A, per tutti i valori di a_1, a_2, a_3 diversi da zero e maggiori di -1.

2. Il teorema dimostrato può esser compreso in un altro più generale. Poniamo:

$$(4)\qquad h^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2\,,$$

intendendo che h rappresenti il valore positivo del radicale. E sia

$$(5)\qquad \begin{cases} \tau_1 = \mathrm{A}\{a_1 + k(a_2 + a_3) + h^2 f_1\}, \\ \tau_2 = \mathrm{A}\{a_2 + k(a_3 + a_1) + h^2 f_2\}, \\ \tau_3 = \mathrm{A}\{a_3 + k(a_1 + a_2) + h^2 f_3\}, \end{cases}$$

ove A e k rappresentano ancora due costanti (la prima diversa da zero); ed f_1, f_2, f_3 delle funzioni di a_1, a_2, a_3 i cui valori assoluti ammettano un limite superiore finito. Per i valori di a_1, a_2, a_3 pei quali h non supera un determinato valore h_0, sia f_0 il limite superiore dei valori assoluti delle tre funzioni.

Dovrà essere, per le formole (1) e (5):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_1} = \mathrm{A}(1 + a_2)(1 + a_3)\{a_1 + k(a_2 + a_3) + h^2 f_1\}, \text{ ecc.};$$

ovvero, conservando le notazioni precedenti:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_1} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial a_1} + \mathrm{A}(k - \tfrac{1}{2})\,\varphi_1 + \mathrm{A}(1 + a_2)(1 + a_3)\,h^2 f_1, \text{ ecc.}$$

Consideriamo a_1, a_2, a_3 come coordinate cartesiane dei punti dello spazio rispetto ad un sistema di assi ortogonali; e prendiamo entro la sfera $h = h_0$ una linea chiusa s. Sommando le equazioni precedenti moltiplicate per da_1, da_2, da_3, e integrando lungo s avremo:

$$\int_s \Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1}\, da_1 = \int \Sigma \frac{\partial \varphi_0}{\partial a_1}\, da_1 + \mathrm{A}(k - 1)\int_s \Sigma \varphi_1\, da_1 + \\ + \mathrm{A}\int_s \Sigma (1 + a_2)(1 + a_3)\, h^2 f_1\, da_1.$$

Ma essendo s, per ipotesi, una linea chiusa, e tanto φ che φ_0 funzioni monodrome, i due primi integrali saranno nulli. Se dunque poniamo

$$\mathrm{P} = \int_s \Sigma \varphi_1\, da_1 \quad , \quad \mathrm{Q} = \int_s \Sigma (1 + a_2)(1 + a_3)\, h^2 f_1\, da_1,$$

si avrà, tolto il fattore A, $(k - \frac{1}{2})\,\mathrm{P} + \mathrm{Q} = 0$, da cui:

$$k - \tfrac{1}{2} = -\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{P}}.$$

Notiamo che non essendo $\Sigma \varphi_1\, da_1$ un differenziale esatto (§ 1), per una linea chiusa s P, in generale, sarà diverso da zero.

Avremo pure

$$|k - \tfrac{1}{2}| = \frac{|Q|}{|P|}.$$

Ma

$$|Q| \leqq f_0 \int_s \Sigma (1 + a_2)(1 + a_3) h^2 |da_1|,$$

giacchè f_0 è il limite superiore dei valori assoluti di f_1, f_2, f_3 entro la sfera $h = h_0$, ed h^2, $1 + a$, $1 + a_3$ sono quantità sempre positive o nulle. Quindi, ponendo

$$(6) \qquad p = \frac{\int_s \Sigma (1 + a_2)(1 + a_3) h^2 |da_1|}{\left| \int_s \Sigma \varphi_1 \, da_1 \right|},$$

avremo:

$$|k - \tfrac{1}{2}| \leqq p f_0.$$

Per ogni linea chiusa s a cui corrisponda un valore di P diverso da zero, la formula (6) fornisce un valore di p (le funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, h^2$ son date dalle formule (3) e (4)). Se per esempio si assume come linea s il contorno di un quadrato situato sul piano $a_3 = 0$, di cui due vertici opposti siano l'origine e un altro punto della retta $a_1 + a_2 = 0$, si troverà $p = \frac{5}{3}$. Dovrà essere pertanto:

$$|k - \tfrac{1}{2}| \leqq \tfrac{5}{3} f_0.$$

Se, in particolare, col tendere di h a zero, f_1, f_2 ed f_3 tendono a zero, in modo che prendendo h_0 abbastanza piccolo, entro la sfera $h = h_0$ il limite superiore dei loro valori assoluti sia piccolo ad arbitrio, dovrà essere $k = \frac{1}{2}$, come nel caso, precedentemente esaminato, che f_1, f_2, f_3 siano identicamente nulle.

3. Le cose dette richiamano l'attenzione sopra un valore particolare del rapporto di Poisson (seguitando così a chiamare la costante $\lambda = \dfrac{k}{k-1}$ anche quando le funzioni f_1, f_2, f_3 sono diverse da zero): il valore $\frac{1}{3}$; al quale dovrà tanto più avvicinarsi quello di λ, quanto più le espressioni delle tensioni principali si avvicinano (anche solo per deformazioni piccolissime, ossia per valori piccolissimi di h) a funzioni lineari degli allungamenti.

Si è naturalmente indotti a mettere in relazione queste deduzioni teoriche col fatto sperimentale a cui ho già accennato, che cioè, effettivamente, per molti corpi il valore di λ differisce poco da $\frac{1}{3}$; e che ne differisce pochissimo per alcuni (come il ferro) pei quali le formule (2) sembrano verificate

con maggiore approssimazione. È presumibile che questa coincidenza non sia puramente casuale; sebbene una vera e propria conferma sperimentale del teorema dimostrato, almeno per i corpi poco deformabili, come i metalli, sia difficile ad ottenersi. Giacchè può accadere che f_0, per qualunque valore di h_0, si mantenga abbastanza grande da permettere alla costante k di differire notevolmente da $\frac{1}{2}$; ma che al tempo stesso i termini $h^2 f_1$, ecc., a causa del fattore h^2, siano sempre così piccoli che la loro esistenza non venga rivelata, in modo sicuro, dall'osservazione diretta: nel qual caso il teorema, che pur deve sussistere se sono verificate le ipotesi da cui siamo partiti, apparirebbe in contraddizione coll'esperienza.

*
* *

4. Sono state eseguite numerose esperienze collo scopo di determinare l'allungamento, positivo o negativo, e la corrispondente contrazione (o dilatazione) laterale, che subisce un solido cilindrico, di dato materiale, sotto l'azione di tensioni applicate alle basi, e dirette secondo l'asse del solido.

Noi ci possiamo proporre di specializzare la funzione φ in modo che le formule (1) vengano a trovarsi in perfetto accordo coi resultati di questa particolare categoria d'esperienze. Ciò può esser fatto in infiniti modi: io mi limiterò ad indicare una espressione di φ che si presenta come un'immediata generalizzazione di quella che è assegnata al potenziale nella teoria delle deformazioni infinitesime.

Resterà poi da vedere se le formule così ottenute siano in accordo anche coi risultati d'altre esperienze, oltre quelle relative alla trazione e compressione dei cilindri: risultati di cui, se occorre, si potrà tener conto aggiungendo al potenziale, e quindi alle tensioni, dei termini di correzione.

5. Diciamo σ_0 la sezione del cilindro allo stato naturale; F la forza da cui esso è sollecitato, convenendo di assumere F positiva o negativa, secondochè il solido è soggetto a tensione o a compressione; a l'allungamento longitudinale unitario.

Nella teoria ordinaria si ritiene $\frac{F}{\sigma_0} = Ea$, ove E rappresenta una costante. Noi porremo invece

$$\frac{F}{\sigma_0} = af(a); \tag{7}$$

ed ammetteremo che la funzione $f(a)$ sia finita e continua, insieme alla sua derivata prima.

Chiameremo ancora λ il rapporto fra la contrazione laterale e l'allungamento longitudinale; rapporto che supporremo esattamente costante.

La funzione $f(a)$ e la costante λ dovranno esser fornite dall'esperienza.

6. Poniamo:

$$s = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{1 - 2\lambda}, \quad t = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{1 + 2\lambda^2}, \tag{8}$$

$$\mu = \frac{1 + 2\lambda^2}{1 + \lambda}; \tag{9}$$

e consideriamo la funzione di s e t:

$$\varphi = \tfrac{1}{2}\mu(t - s^2) f(s) + \int_0^s f(s)\, s\, ds, \tag{10}$$

f denotando la stessa funzione che figura nella formula (7).

La φ è una funzione degli allungamenti principali a_1, a_2, a_3 che non varia permutando queste variabili. Potrà quindi rappresentare un potenziale di elasticità, ammesso che risulti positiva per tutti i valori di s e t che corrispondono a deformazioni possibili.

Se in particolare $f = \text{cost.} = \mathrm{E}$, sarà:

$$\varphi = \frac{\mathrm{E}}{2}\{\mu(t - s^2) + s^2\} = \frac{\mathrm{E}}{2}\{\mu t + (1 - \mu) s^2\}:$$

si ritrova, cioè, l'espressione che ha il potenziale nella teoria ordinaria.

Supponendo che il potenziale sia rappresentato dalla formula (10), calcoliamo le tensioni τ_1, τ_2, τ_3. Si ha:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a_1} = \frac{\partial\varphi}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial a_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial a_1}.$$

Ma dalle formule (10) e (8)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \tfrac{1}{2}\mu(t - s^2) f'(s) + (1 - \mu) s f(s), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \tfrac{1}{2}\mu f(s);$$

$$\frac{\partial s}{\partial a_1} = \frac{1}{1 - 2\lambda}, \quad \frac{\partial t}{\partial a_1} = \frac{2a_1}{1 + 2\lambda^2}.$$

Quindi:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a_1} = \frac{1}{1 - 2\lambda}\left[\frac{1}{2}\mu(t - s^2) f'(s) + (1 - \mu) s f(s)\right] + \frac{\mu}{1 + 2\lambda^2} a_1 f(s), \tag{11}$$

ovvero, raccogliendo i termini che contengono il fattore $f(s)$, e sostituendo a μ il suo valore dato dalla (9):

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a_1} = \frac{1 + 2\lambda^2}{2(1 + \lambda)(1 - 2\lambda)}(t - s^2) f'(s) + \frac{1}{1 + \lambda}(a_1 + \lambda s) f(s).$$

Formule analoghe si avranno per $\frac{\partial\varphi}{\partial a_2}$ e $\frac{\partial\varphi}{\partial a_3}$. Le tensioni principali τ_1, τ_2, τ_3 si otterranno poi dividendo le derivate di φ per $(1 + a_2)(1 + a_3)$, ecc.

Applichiamo queste formule all'esame di una particolare deformazione di un cilindro limitato da due sezioni normali all'asse. Gli allungamenti principali a_1, a_2, a_3 abbiano lo stesso valore in tutto il solido. La direzione principale r_3 sia parallela all'asse del cilindro, a cui verrà assegnato un verso positivo. Sia inoltre

$$a_1 = a_2 = -\lambda a_3 .$$

Per le formule (8) sarà $s = a_3$, $t = a_3^2$; quindi:

$$t - s^2 = 0 ,$$

$$a_1 + \lambda s = 0 \ , \ a_2 + \lambda s = 0 \ , \ a_3 + \lambda s = (1 + \lambda) a_3 ,$$

$$f(s) = f(a_3) .$$

Onde la formula (11) e le analoghe daranno:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a_1} = 0 \ , \ \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} = 0 \ , \ \frac{\partial \varphi}{\partial a_3} = a_3 f(a_3) ;$$

e le (1):

$$\tau_1 = 0 \ , \ \tau_2 = 0 \ , \ \tau_3 = \frac{1}{\alpha} a_3 f(a_3) , \tag{12}$$

avendo posto $\alpha = (1 + a_1)(1 + a_2) = (1 - \lambda a_3)^2$.

Da considerazioni ovvie segue che il cilindro è sollecitato soltanto alle basi. Sulla base rivolta nel verso positivo dell'asse, vale a dire della direzione r_3, agirà una tensione normale uguale a τ_3, quindi una forza $F = \tau_3 . \sigma$, σ denotando la sezione del cilindro *deformato*: forza positiva o negativa con τ_3, ossia secondo che τ_3, e quindi F, è diretta verso l'esterno o verso l'interno del solido. Sulla base opposta agirà una forza uguale e contraria.

Si è chiamato σ_0 (§ 5) la sezione del cilindro *allo stato naturale*. Sarà evidentemente $\sigma = (1 + a_1)(1 + a_2)\sigma_0 = \alpha \sigma_0$; quindi $F = \alpha \tau_3 . \sigma_0$, e per la terza delle formule (12), $F = a_3 f(a_3) . \sigma_0$, o più semplicemente, tolto l'indice 3:

$$F = a f(a) . \sigma_0 .$$

Inversamente si potrà ritenere che se il cilindro è così sollecitato, la deformazione sarà quella presa in esame: che si avrà, cioè, un allungamento longitudinale a, legato alla forza F dalla formula precedente, e una contrazione laterale λa.

Questi risultati sono identici a quelli a cui si è supposto che conducano le esperienze sulla trazione e compressione dei cilindri. Noi potremo, per conseguenza, adottare la formula (10), finchè ulteriori esperienze non provino che essa è in difetto, e suggeriscano una più esatta rappresentazione del potenziale.