# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVIII.

1911

---

SERIE QUINTA

---

## RENDICONTI

---

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

---

**VOLUME XX.**

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1911

Geodesia. — *Sopra un procedimento di Helmert in un particolare caso di applicazione del metodo dei minimi quadrati.* Nota del Socio P. Pizzetti.

Il prof. Helmert, in una interessante ricerca [1], pubblicata recentemente, sul grado di precisione della determinazione eseguita da Hayford negli Stati Uniti, delle costanti dell'ellissoide terrestre e della profondità della così detta compensazione isostatica, ha avuto occasione di escogitare ed usare un artificio di calcolo che può spesso essere utile nella pratica del metodo dei minimi quadrati. Dò qui una generalizzazione dell'artificio stesso; non perchè questa generalizzazione presenti difficoltà, ma, più che altro, per richiamare l'attenzione di coloro che coltivano la teoria dei m. q. sulla ingegnosa idea del Helmert, la quale, troppo modestamente nascosta nella citata Nota dell'eminente nostro Socio straniero, potrebbe a molti sfuggire.

Il problema considerato da Helmert può presentarsi come segue:

Siano le $\psi_r(X, Y, Z)$ $(r = 1, 2 \ldots n)$, $n$ funzioni di tre incognite $X, Y, Z$ e di certi parametri determinati coll'osservazione. Siano pure dati dall'osservazione i valori $L_1, L_2 \ldots L_n$ che le dette funzioni assumono in corrispondenza ai valori osservati dei detti parametri. Assunto per la incognita Z un valore arbitrario $Z_1$ e considerate $X, Y$ come sole incognite, si sono determinati, col metodo consueto detto delle *determinazioni indirette*, i valori più plausibili $X_1, Y_1$ delle $X, Y$ e la corrispondente somma $[v_1^2]$ dei quadrati dei residui

$$v_{1r} = \psi_r(X_1, Y_1, Z_1) - L_r. \tag{1}$$

Il calcolo analogo è stato ripetuto per altri due valori prefissati, $Z_2$ e $Z_3$ della Z, ottenendo i nuovi sistemi di valori $X_2, Y_2$ ; $X_3, Y_3$ per le incognite e $[v_2^2], [v_3^2]$ per la somma dei quadrati dei residui.

Si tratta di dedurre da questi risultati numerici quali siano i valori più plausibili $X_0, Y_0, Z_0$, quali i pesi delle tre incognite e quale la somma $[\lambda^2]$ dei quadrati dei residui delle relazioni osservate

$$\psi_r(X, Y, Z) - L_r = \lambda_r \tag{2}$$

ove, nel modo consueto, si considerino tutte e tre le $X, Y, Z$ come incognite. A questo risultato Helmert si era proposto di giungere senza appli-

[1] *Ueber die Genauigkeit der Dimensionen des Hayfordschen Erdellipsoids.* Sitzungsber. d. K. Preuss. Akdemie d. Wiss., 1911, II.

care direttamente alla (1) il consueto procedimento numerico, ciò che avrebbe reso necessaria la valutazione dei coefficienti differenziali delle $\psi_r$ rispetto alla $z$; valutazione alquanto faticosa nel caso presente nel quale la Z rappresenta la *profondità della compensazione isostatica*. Lo scopo è stato raggiunto deducendo dal paragone delle (1) (2) e dalle note proprietà delle equazioni normali una semplice relazione fra le somme $[\lambda^2]$, $[v_1^2]$, il valore più plausibile $Z_0$ della Z e il peso di essa $p_z$. Avendosi a disposizione, per le cose dette, tre di tali relazioni, restavano facilmente determinate $[\lambda^2]$, $Z_0$ e $p_z$.

Generalizzando alquanto il procedimento, consideriamo ora un sistema di $n$ relazioni osservate

(3) $$\psi_r(X, Y, Z \ldots U, V \ldots) - L_r = \lambda_r$$

le quali contengano $\sigma + \tau$ $(< n)$ incognite che distingueremo convenzionalmente in due gruppi, dicendo del 1° gruppo le $X, Y, Z \ldots$ in numero di $\sigma$, e del 2° gruppo le $U, V \ldots$ in numero di $\tau$. A queste ultime supponiamo successivamente attribuiti $\omega$ sistemi di valori numerici non identici (ci riserbiamo di stabilire fra poco quale dev'essere questo numero $\omega$) $U_1, V_1 \ldots$ $U_2, V_2 \ldots, U_\omega, V_\omega \ldots$, e, in corrispondenza a ciascuno di tali sistemi, supponiamo dedotti dalle relazioni osservate i valori più plausibili delle $\tau$ incognite, che risulteranno rispettivamente, nei singoli casi:

$$\begin{array}{c} X_1, Y_1, Z_1 \ldots \\ X_2, Y_2, Z_2 \ldots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ X_\omega, Y_\omega, Z_\omega \ldots \end{array}$$

Partendo da valori numerici approssimati $X_0, Y_0, Z_0 \ldots$ e ponendo

$$\left(\frac{\partial\psi_r}{\partial X}\right)_0 = a_r, \quad \left(\frac{\partial\psi_r}{\partial Y}\right)_0 = b_r, \quad \left(\frac{\partial\psi_r}{\partial Z}\right)_0 = c_r, \ldots$$

$$X_s = X_0 + \xi_s, \quad Y_s = Y_0 + \eta_s, \quad Z_s = Z_0 \pm \zeta_s, \ldots$$

lo sviluppo in serie delle (3), nella consueta ipotesi che siano trascurabili i termini piccoli del 2° ordine rispetto alle $\xi, \eta, \zeta \ldots$, condurrà a relazioni che, supponendo per semplicità $\sigma = 3$, saranno della forma

(4) $$a_r \xi_s + b_r \eta_s + c_r \zeta_s + l_{sr} = v_{sr}$$

$(s = 1, 2 \ldots \omega\ ;\ r = 1, 2 \ldots n)$, ove si indica in generale con $v_{sr}$ il residuo più plausibile della $r^{ma}$ equazione nella ipotesi $U = U_s$, $V = V_s \ldots$ Questi residui soddisfaranno alle note relazioni

(5) $$[av_s] = [bv_s] = [cv_s] = 0,$$

ove, come al solito, le parentesi quadre rappresentano sommatorie fatte rispetto all' indice $r$ da 1 ad $n$, mentrechè l' indice $s$ si mantiene fisso.

Indichiamo ancora con $U_0$, $V_0$ dei valori approssimati delle incognite del 2° gruppo che, per maggior chiarezza di scrittura, riduciamo a due sole ($\tau = 2$) e con

$$X_0 + \xi_0 \ , \ Y_0 + \eta_0 \ , \ Z_0 + \eta_0 \ , \ U_0 + \varepsilon_0 \ , \ V_0 + \varphi_0$$

i valori più plausibili delle incognite quali risulterebbero dalla consueta applicazione del metodo dei m. q. alle (3) ove tutte le $X, Y \ldots V$ si considerassero ad un tempo come incognite. Ponendo

$$\left(\frac{\partial \psi_r}{\partial U}\right)_0 = e_r \qquad \left(\frac{\partial \psi_r}{\partial V}\right)_0 = f_r$$

$$\psi_r(X_0, Y_0, Z_0, U_0, V_0) - L_r = l_r$$

e indicando con $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$ i residui più plausibili, avremo

(6) $$a_r \xi_0 + b_r \eta_0 + c_r \zeta_0 + e_r \varepsilon_0 + f_r \varphi_0 + l_r = \lambda_r$$

(7) $$[a\lambda] = [b\lambda] = [c\lambda] = [e\lambda] = [f\lambda] = 0 .$$

D'altra parte se poniamo

$$U_s = U_0 + \varepsilon_s \ , \quad V_s = V_0 + \varphi_s$$

le (4) possono scriversi

$$a_r \xi_s + b_r \eta_s + c_r \zeta_s + e_r \varepsilon_s + f_r \varphi_s + l_r = v_{sr}$$

e sottraendo dalla (6)

(8) $$\lambda_r - v_{sr} = a_r(\xi_0 - \xi_s) + b_r(\eta_0 - \eta_s) + c_r(\zeta_0 - \zeta_s) + \\ + e_r(\varepsilon_0 - \varepsilon_s) + f_r(\varphi_0 - \varphi_s) .$$

Ricordiamo ora che, per le note proprietà dei coefficienti delle così dette equazioni ridotte, se si pone

$$t_r = a_r x + b_r y + c_r z + e_r u + f_r v$$

si ha, qualunque siano $x, y, z, u, v$

$$[et] = [e^2 . 3]\, u + [ef . 3]\, v$$
$$[ft] = \qquad\qquad [f^2 . 4]\, v .$$

Applicando queste formole alle (8) e ricordando le (7) abbiamo

(9) $$\begin{cases} -[ev_s] = [e^2 . 3]\,(\varepsilon_0 - \varepsilon_s) + [ef . 3]\,(\varphi_0 - \varphi_s) , \\ -[fv_s] = \qquad\qquad [f^2 . 4]\,(\varphi_0 - \varphi_s) . \end{cases}$$

Dalle (8) deduciamo poi in modo ovvio (moltiplicando prima per $\lambda_r$ e sommando rispetto all' indice $r$, e poi moltiplicando per $v_{sr}$ e sommando pure rispetto ad $r$):

$$[\lambda^2] = [\lambda v_s]$$

$$(10) \qquad [\lambda^2] - [v_s^2] = [ev_s](\varepsilon_0 - \varepsilon_s) + [fv_s](\varphi_0 - \varphi_s).$$

Sostituendo per le parentesi le espressioni (9) e ponendo

$$\begin{aligned} A &= [\lambda^2] + [e^2.3]\,\varepsilon_0^2 + [ef.3]\,\varepsilon_0\,\varphi_0 + [f^2.4]\,\varphi_0^2 \\ B &= 2[e^2.3]\,\varepsilon_0 + [ef.3]\,\varphi_0 \\ C &= [ef.3]\,\varepsilon_0 + 2[f^2.4]\,\varphi_0 \end{aligned}$$

la (10) può scriversi

$$(11) \quad A = B\varepsilon_s + C\varphi_s + [v_s^2] - [e^2.3]\,\varepsilon_s^2 - [ef.3]\,\varepsilon_s\,\varphi_s - [f^2.4]\,\varphi_s^2.$$

Questa equazione contiene le (6) incognite

$$A\ ,\ B\ ,\ C\ ,\ [e^2.3]\ ,\ [ef.3]\ ,\ [f^2.4],$$

determinate le quali, si hanno senza difficoltà $[\lambda^2]$, $\varepsilon_0$, $\varphi_0$ e gli elementi pel calcolo dei pesi delle incognite U e V. Da questi dati è poi facile risalire alla valutazione di $X_0\,Y_0\,Z_0$ e dei loro pesi.

Occorre pertanto avere sei equazioni del tipo (11) per risolvere il problema; vale a dire che il numero, sopra indicato con $\omega$, delle differenti ipotesi che occorre fare sui valori numerici di U e V deve essere *sei* nel caso presente ([1]).

Se più generalmente le incognite, che abbiamo chiamate del 2° gruppo, sono in numero di $\tau$, si vede facilmente che il numero $\omega$ delle differenti ipotesi è

$$\omega = 1 + \tau + \frac{\tau(\tau+1)}{2} = \frac{(\tau+1)(\tau+2)}{2}.$$

Com'è chiaro, per $\tau > 1$, il procedimento si complica di molto, e generalmente converrà meglio il metodo comune nel quale tutte le incognite risultano insieme determinate da un unico sistema di equazioni normali. A meno che non sia estremamente faticoso il calcolo dei valori numerici delle derivate parziali, qui indicati con $e_r$, $f_r$, dei quali, come è chiaro, il procedimento qui esposto evita la valutazione diretta.

([1]) Che il determinante dei coefficienti nelle *sei* equazioni (11) non è identicamente nullo, risulta dal fatto che il determinante stesso può svilupparsi nella forma

$$\sum_{r,s,t} = \varphi_r\,\varphi_s\,\varphi_t \begin{vmatrix} 1 & \varepsilon_r & \varphi_r \\ 1 & \varepsilon_s & \varphi_s \\ 1 & \varepsilon_t & \varphi_t \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \varepsilon_l & \varepsilon^2_l \\ 1 & \varepsilon_m & \varepsilon^2_m \\ 1 & \varepsilon_n & \varepsilon^2_n \end{vmatrix}$$

dove $r, s, t$ è una qualunque terna scelta fra i numeri da 1 a 6 ed $l, m, n$ è la terna complementare. Se p. es. si suppone $\varphi_4 = \varphi_5 = \varphi_6 = 0$, la sommatoria $(\Sigma)$ si riduce ad un solo termine $(r=1, s=2, t=3)$ e condizione necessaria e sufficiente pel non annullarsi del determinante è che sian differenti da zero le quantità $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, $(\varepsilon_4 - \varepsilon_5)$ $(\varepsilon_5 - \varepsilon_6)$, $(\varepsilon_6 - \varepsilon_4)$, $(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)(\varphi_3 - \varphi_1) - (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)(\varphi_2 - \varphi_1)$.