ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1912

20 cc. di acido solforico concentrato e riscaldati a bagnomaria per circa un'ora. Si versa allora in acqua ed il prodotto che si separa viene seccato e ricristallizzato da benzolo bollente. Si ottiene una sostanza giallo-bruna, cristallina, che fonde a 157°, solubile negli alcali e che è identica al parabromoossiazobenzolo:

$$Br.C_6H_4.N{=}N.C_6H_4(OH)$$

già noto.

Gr. 0,0843 di sostanza danno cc. 7 di azoto a 8° e 769 mm.

In 100 parti:

	Trovato	Calcolato per $C_{11}H_9N_2OBr$
N	10.21	10.11

Il benzolo da cui venne separata la sostanza, concentrato fortemente, lascia una massa cristallina rossa, costituita da parabromoazobenzolo, che rappresenta la maggior parte del prodotto. La reazione è quindi poco netta e fornisce scarso rendimento.

Fisica-matematica. — *Sulla risoluzione delle equazioni integro-differenziali dell'equilibrio dei corpi elastici isotropi per dati spostamenti in superficie.* Nota del Corrisp. G. LAURICELLA.

Il prof. Volterra, in una serie di Note inserite in questi Rendiconti, ha istituita la teoria matematica generale della fisica ereditaria, studiando sistematicamente le equazioni integro-differenziali, dalle quali essa può farsi dipendere, mediante una nuova analisi, avente origine dal concetto del passaggio al limite, in base al quale egli aveva già da molti anni fondata la teoria delle funzioni di linea e successivamente quella delle equazioni integrali. Uno dei problemi di fisica-ereditaria, particolarmente considerato dal Volterra, è quello dell'equilibrio dei corpi elastici, relativamente al quale egli ha generalizzato le classiche teorie di Betti e di Somigliana, illustrando i risultati generali ottenuti con lo studio della deformazione di una sfera elastica isotropa per dati spostamenti in superficie e per date tensioni pure in superficie.

In alcune mie Note di questi Rendiconti, i cui risultati furono poi raccolti in una Memoria del Nuovo Cimento [1] risolvetti i problemi interno ed esterno dell'equilibrio dei corpi elastici isotropi per dati spostamenti in superficie e per altri dati analoghi alle tensioni, applicando la teoria delle equazioni integrali di Fredholm. La prima difficoltà, che si incontra nell'applicare questa teoria ai problemi di elasticità, consiste nel fatto che i

[1] Serie V, vol. XIII, 1907 (*Alcune applicazioni della teoria delle equazioni funzionali alla fisica-matematica*).

nuclei del sistema di equazioni integrali, tratto dalle formole di Somigliana, hanno delle singolarità tali che i risultati di Fredholm non possono essere applicati; e nelle mie citate Note, come nella mia detta Memoria, essa è superata mediante l'introduzione del concetto di pseudo-tensione (1). Qualora si vogliano risolvere con metodo analogo i problemi di equilibrio elastico nel caso ereditario, se si ricorre ai doppî strati generali, contenuti nelle formole del Volterra, generalizzazione di quelle del Somigliana, la detta difficoltà si presenta ancora, aggravata dalle condizioni di ereditarietà; però essa può similmente essere superata, mediante una conveniente generalizzazione del concetto di pseudo-tensione, la quale richiede la risoluzione di un'equazione integrale di 1ª specie di Volterra.

Bisogna avvertire che le equazioni integrali, che in questo modo si hanno per la risoluzione dei problemi di equilibrio nel caso ereditario, non sono più del tipo di quelle studiate da Fredholm; ma sono di natura più complessa; però possono facilmente ricondursi al detto tipo mediante artifici assai semplici, che saranno qui spiegati.

Per brevità nella presente Nota sarà considerato il solo problema dell'equilibrio di un corpo elastico isotropo finito per dati spostamenti in superficie nel caso ereditario, e saranno omessi gli altri problemi analoghi che potrebbero essere similmente risoluti. Per la medesima ragione mi varrò qui dei risultati e delle notazioni contenute nelle due Note del prof. Volterra: *Sulle equazioni integro-differenziali della teoria dell'elasticità* (2); *Equazioni integro-differenziali dell'elasticità nel caso della isotropia* (3), che indicherò rispettivamente con Nota I e Nota II, e dei risultati e delle notazioni contenute nella mia citata Memoria; inoltre in qualche punto le dimostrazioni, che non presentano difficoltà, saranno risparmiate, e qualche volta i teoremi stessi non saranno enunciati.

1. Le equazioni indefinite tra le componenti u, v, w della deformazione di un solido elastico isotropo nel caso ereditario e nel caso in cui le forze di massa (come si può sempre supporre senza togliere nulla alla generalità) sono nulle, si possono scrivere (4):

(1) Effettivamente l'introduzione delle pseudo-tensioni non è necessaria per vincere questa difficoltà; infatti i doppî strati corrispondenti alle pseudo-tensioni erano stati da me scritti per applicare il metodo di Neumann, indipendentemente dal concetto di pseudo-tensione, nella mia tesi di abilitazione *Equilibrio dei corpi elastici isotropi* (Cap. IV, § 1; Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, 1894). Il concetto di pseudo-tensione invece è necessario per discutere in modo esauriente le equazioni integrali relative al problema che si vuole risolvere. Analoga osservazione può ripetersi nel caso ereditario.

(2) Rendiconti dei Lincei, vol. XVIII, 2° sem., 1909, fasc. 9.

(3) Ibid., fasc. 12.

(4) Ibid, form. (3).

$$(1)\quad \begin{cases} \varDelta^2 u(t) + k\,\dfrac{\partial\theta(t)}{\partial x} + \\ \qquad + \displaystyle\int_{t_0}^{t}\left[\psi(t,\tau)\,.\,\varDelta^2 u(\tau) + \{\varphi(t,\tau)+\psi(t,\tau)\}\,\frac{\partial\theta(\tau)}{\partial x}\right]d\tau = 0\,, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Sia i una costante finita qualsiasi; e sia $j(t,\tau)$ una funzione qualsiasi della medesima natura delle funzioni $\varphi(t,\tau)$, $\psi(t,\tau)$. Posto:

$$(2)\quad \begin{cases} X_{\sigma,i,j} = \dfrac{du(t)}{dn} + k\theta(t)\cos\widehat{nx} + \\ \quad + i\left(\dfrac{\partial v(t)}{\partial x}\cos\widehat{ny} + \dfrac{\partial w(t)}{\partial x}\cos\widehat{nz} - \dfrac{\partial v(t)}{\partial y}\cos\widehat{nx} - \dfrac{\partial w(t)}{\partial z}\cos\widehat{nx}\right) + \\ \qquad + \displaystyle\int_{t_0}^{t}\Big\{\psi(t,\tau)\,\frac{du(\tau)}{dn} + (\varphi+\psi)\,\theta(\tau)\cos\widehat{nx} + \\ \qquad + j(t,\tau)\left(\dfrac{\partial v(\tau)}{\partial x}\cos\widehat{ny} + \dfrac{\partial w(\tau)}{\partial x}\cos\widehat{nz} - \cdots\right)\Big\}\,d\tau\,, \\ Y_{\sigma,i,j} = \cdots\cdots \\ Z_{\sigma,i,j} = \cdots\cdots\,, \end{cases}$$

si ha dalle (1), integrando per parti,

$$(3)\quad \begin{cases} 0 = \displaystyle\int_S \Sigma u(t)\Big\{\varDelta^2 u(t) + k\,\frac{\partial\theta(t)}{\partial x} + \\ \quad + \displaystyle\int_{t_0}^{t}\left[\psi(t,\tau)\,.\,\varDelta^2 u(\tau) + \{\varphi+\psi\}\,\frac{\partial\theta}{\partial x}\right]d\tau\Big\}\,dS = \\ = \displaystyle\int_S \Sigma u\Big\{\varDelta^2 u(t) + k\,\frac{\partial\theta}{\partial x} + i\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z} - \frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial z\,\partial x}\right) + \\ \quad + \displaystyle\int_{t_0}^{t}\Big[\psi(t,\tau)\,.\,\varDelta^2 u(\tau) + (\varphi+\psi)\,\frac{\partial\theta}{\partial x} + \\ \quad + j(t,\tau)\left(\frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z} - \cdots\right)\Big]\,d\tau\Big\}\,dS = \\ = -\displaystyle\int_S\Big\{\varDelta u(t) + \varDelta v + \varDelta w + k\theta^2 + \\ \quad + 2i\left(\frac{\partial u(t)}{\partial y}\frac{\partial v(t)}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big\}\,dS + \\ - \displaystyle\int_{t_0}^{t} d\tau \int_S\Big\{\psi(t,\tau)\left[\varDelta(u(\tau),u(t)) + \varDelta(v(\tau),v(t)) + \varDelta(w(\tau),w(t))\right] + \\ \quad + (\varphi+\psi)\,\theta(\tau)\,\theta(t) + j(t,\tau)\left(\frac{\partial u(t)}{\partial y}\frac{\partial v(\tau)}{\partial x} + \cdots + \frac{\partial u(\tau)}{\partial y}\frac{\partial v(t)}{\partial x} + \cdots - \right. \\ \quad \left. - \frac{\partial u(t)}{\partial x}\frac{\partial v(\tau)}{\partial y} - \cdots - \frac{\partial u(\tau)}{\partial x}\frac{\partial v(t)}{\partial y} - \cdots\right)\Big\}\,dS + \\ - \displaystyle\int_\sigma \Sigma u(t)\,.\,X_{\sigma,i,j}\,d\sigma\,. \end{cases}$$

Insieme alle equazioni (1) è utile considerare le equazioni aggiunte $(1)'$, che per brevità non scriveremo, e insieme alle (2), che chiameremo *componenti delle tensioni generali ereditarie*, converrà pure considerare le *componenti aggiunte*, che senza qui scrivere esplicitamente, indicheremo con $X'_{\sigma,i,j}$, $Y'_{\sigma,i,j}$, $Z'_{\sigma,i,j}$.

2. Le espressioni:

$$u' = \alpha \frac{1}{r} + \frac{\beta}{2} \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} \qquad v' = \frac{\beta}{2} \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial x \, \partial y} \quad , \quad w' = \frac{\beta}{2} \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial x \, \partial z}, \tag{4}$$

dove α e β sono legate dalla condizione integrale:

$$\begin{aligned}(1+k)\,\beta(\mathrm{T}\,,t) &+ \int_t^{\mathrm{T}} [\varphi(\tau\,,t) + 2\psi(\tau\,,t)]\,\beta(\mathrm{T}\,,\tau)\,d\tau + k\alpha(\mathrm{T}\,,t) + \\ &+ \int_t^{\mathrm{T}} [\varphi(\tau\,,t) + \psi(\tau\,,t)]\,\alpha(\mathrm{T}\,,\tau)\,d\tau = 0\,,\end{aligned} \tag{5}$$

formano [1] una soluzione delle equazioni $(1)'$; e se, oltre alle posizioni contenute nella Nota II (§ 10) del prof. Volterra, facciamo le altre analoghe:

$$\mathrm{P}(\mathrm{T}\,,t) = i\beta(\mathrm{T}\,,t) + \int_t^{\mathrm{T}} j(\tau\,,t)\,\beta(\mathrm{T}\,,\tau)\,d\tau, \tag{6}$$

$$\mathrm{Q}(\mathrm{T}\ \ t) = i\alpha(\mathrm{T}\,,t) + \int_t^{\mathrm{T}} j(\tau\,,t)\,\alpha(\mathrm{T}\,,\tau)\,d\tau, \tag{7}$$

si avrà, per le componenti aggiunte delle tensioni generali ereditarie corrispondenti alle (4),

$$(2)'_1 \quad \left\{ \begin{aligned} X'_{\sigma,i,j} &= \frac{d\frac{1}{r}}{dn} + \frac{\mathrm{N}(\mathrm{T}\,,t) + \mathrm{P}(\mathrm{T}\,,t)}{2} \left\{ 1 - 3\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 \right\} \frac{d\frac{1}{r}}{dn}\,, \\ Y'_{\sigma,i,j} &= \left(\frac{\mathrm{N}+\mathrm{P}}{2} + \mathrm{Q}\right)\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\cos\widehat{nx} - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\cos\widehat{ny}\right) + \\ &\qquad - 3\,\frac{\mathrm{N}+\mathrm{P}}{2}\,\frac{\partial r}{\partial x}\,\frac{\partial r}{\partial y}\,\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\,, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

3. Tra le soluzioni $u\,,v\,,w$ delle equazioni (1), le soluzioni $u'\,,v'\,,w'$ delle equazioni aggiunte $(1)'$, e le corrispondenti espressioni $X_{\sigma,i,j}$, $Y_{\sigma,i,j}$, ...; $X'_{\sigma,i,j}$, ... , ... sussiste una formola di reciprocità, generalizzazione di quella di Betti, identica alla (1) della Nota I del prof. Volterra. Allora, isolando

[1] Volterra, Nota II, § 10.

il punto (ξ, η, ζ) dell' interno del corpo elastico S ed applicando nel campo rimanente tale formola di reciprocità ad una soluzione qualsiasi della (1) e alle (4), si avrà, mediante artificii ben noti [1],

$$-4\pi u(\xi, \eta, \zeta, \mathrm{T}) = \frac{d}{d\mathrm{T}} \int_{t_0}^{\mathrm{T}} dt \left\{ \int_\sigma \Sigma u' \mathrm{X}_{\sigma.i,j}\, d\sigma - \int_\sigma \Sigma u \mathrm{X}'_{\sigma,i,j}\, d\sigma \right\}. \tag{8}$$

Posto poi:

$$\varphi(t) = if(t) + \int_{t_0}^{t} j(t, \tau) f(\tau)\, d\tau = \mathrm{A}_3 f,$$

si ricava [2]:

$$\frac{d}{d\mathrm{T}} \int_{t_0}^{\mathrm{T}} \mathrm{P}(\mathrm{T}, t) \mathrm{F}(t)\, dt = (\mathrm{A}_2^{-1} - \mathrm{A}_1^{-1}) \mathrm{A}_3 \mathrm{F}(\mathrm{T}),$$

$$\frac{d}{d\mathrm{T}} \int_{t_0}^{\mathrm{T}} \mathrm{Q}(\mathrm{T}, t) \mathrm{F}(t)\, dt = \mathrm{A}_1^{-1} \mathrm{A}_3 \mathrm{F}(\mathrm{T});$$

e quindi [3]:

$$\tag{8'} \left| \begin{aligned} -4\pi u(\xi, \eta, \zeta, t) = \int_\sigma \Big\{ & \frac{1}{r} \mathrm{A}_1^{-1} \mathrm{X}_{\sigma,i,j} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} (\mathrm{A}_2^{-1} - \mathrm{A}_1^{-1}) \mathrm{X}_{\sigma,i,j} + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 r}{\partial x\, \partial y} (\mathrm{A}_2^{-1} - \mathrm{A}_1^{-1}) \mathrm{Y}_{\sigma,i,j} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 r}{\partial x\, \partial z} (\mathrm{A}_2^{-1} - \mathrm{A}_1^{-1}) \mathrm{Z}_{\sigma,i,j} \Big\} d\sigma + \\ - \int_\sigma \Big\{ & \frac{d\frac{1}{r}}{dn} u + \frac{1}{2} \Big\{ 1 - 3 \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \Big\} \frac{d\frac{1}{r}}{dn} (\mathrm{A}_2^{-1}\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2^{-1}\mathrm{A}_3 - \mathrm{A}_1^{-1}\mathrm{A}_3 - 1) u + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \cos \widehat{nx} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos \widehat{ny} \right) (\mathrm{A}_2^{-1}\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2^{-1}\mathrm{A}_3 + \mathrm{A}_1^{-1}\mathrm{A}_3 - 1) v + \\ & - \frac{3}{2} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y} \frac{d\frac{1}{r}}{dn} (\mathrm{A}_2^{-1}\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2^{-1}\mathrm{A}_3 - \mathrm{A}_1^{-1}\mathrm{A}_3 - 1) v + \cdots \Big\} d\sigma. \end{aligned} \right.$$

4. Si determini la funzione $j(\tau, t)$ in modo che sia soddisfatta la condizione:

$$\frac{\mathrm{N} + \mathrm{P}}{2} + \mathrm{Q} = 0, \tag{9}$$

ossia in modo che sia soddisfatta l'equazione integrale:

$$\tag{9'} \begin{aligned} \beta(\mathrm{T}, t) + i \{ 2\alpha(\mathrm{T}, t) + \beta(\mathrm{T}, t) \} + \int_t^{\mathrm{T}} \psi(\tau, t) \beta(\mathrm{T}, \tau)\, d\tau + \\ + \int_t^{\mathrm{T}} j(\tau, t) \{ 2\alpha(\mathrm{T}, \tau) + \beta(\mathrm{T}, \tau) \}\, d\tau = 0. \end{aligned}$$

(1) Volterra, Nota II, § 10.
(2) Volterra, Nota II, § 11.
(3) Volterra, Nota II, § 12.

Poichè, come risulta dalla (5) e dalla (15) contenuta nella Nota II del Volterra,

$$\alpha(t\,,t)=1\,,\quad \beta(t\,,t)=-\frac{k}{1+k}\,,\quad 2\alpha(t\,,t)+\beta(t\,,t)=\frac{2+k}{1+k}\,,$$

supposto:

$$i=\frac{k}{2+k}\,, \tag{10}$$

risulta dalla teoria delle equazioni integrali di 1ª specie di Volterra [1] che per $k\geqq-\frac{2}{3}$ si può certamente assegnare un limite superiore finito dei valori di $j(\tau\,,t)$.

Distingueremo il caso relativo alle ipotesi (9), (10), chiamandolo delle *pseudo tensioni ereditarie.*

In questo caso, valendosi di trasformazioni identiche a quelle contenute nei §§ 7 e 8 al Cap. I della mia citata Memoria e seguendo il procedimento tenuto dal prof. Volterra al § 3 della sua Nota: *Sulle equazioni integro-differenziali* [2], si ottengono alcuni teoremi di unicità, analoghi a quelli contenuti nei §§ 7, 8 e 9 della mia citata Memoria. Ci limiteremo qui ad enunciare solo il seguente:

$u\,,v\,,w$ siano integrali delle equazioni (1) *nel campo* S, *tali che valga per essi la formola di integrazione per parti* (3), *e tali ancora che per un certo intervallo di tempo si abbia:*

(nei punti di σ) $\qquad u=v=w=0\,,$

si avrà per $k\geqq-\frac{2}{3}$ e per tutto l'intervallo di tempo:

(nei punti di S) $\qquad u=v=w=0\,.$

5. Osserviamo che nel caso delle pseudo-tensioni ereditarie, in virtù della (9′), si ha, qualunque sia la funzione F(T),

$$(\mathrm{A}_2^{-1}\mathrm{A}_1+\mathrm{A}_2^{-1}\mathrm{A}_3+\mathrm{A}_1^{-1}\mathrm{A}_3-1)\,\mathrm{F(T)}=0\,,$$

$$(\mathrm{A}_2^{-1}\mathrm{A}_1+\mathrm{A}_2^{-1}\mathrm{A}_3-\mathrm{A}_1^{-1}\mathrm{A}_3-1)\,\mathrm{F(T)}=-2\,\mathrm{A}_1^{-1}\mathrm{A}_3\,\mathrm{F(T)}\,;$$

e così, posto:

$$\mathrm{L}_\sigma'=\left\{1-3\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2\right\}\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\,,\quad \mathrm{M}_\sigma'=-3\,\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\,, \tag{11}$$

$$\mathrm{N}_\sigma'=-3\,\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial z}\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\,,$$

[1] Annali di Matematica, t. XXV, serie II, pag. 153, § 11 (anno 1897).

[2] Rendiconti dei Lincei, vol. XVIII, serie 5ª, 1º sem., fasc. 4.

il secondo integrale al secondo membro della formola (8′) diviene in questo caso:

$$\int_\sigma \left\{ \frac{d\frac{1}{r}}{dn} u - \Sigma \mathrm{L}_\sigma' \mathrm{A}_1^{-1} \mathrm{A}_3 u \right\} d\sigma .$$

Ciò premesso, si considerino le tre espressioni (*pseudo-doppi strati elastici ereditari*):

$$(12)\quad \begin{cases} \mathrm{U}(\xi, \eta, \zeta, t) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_\sigma \left\{ \frac{d\frac{1}{r}}{dn} u(t) - \Sigma \mathrm{L}_\sigma' \mathrm{A}_1^{-1} \mathrm{A}_3 u \right\} d\sigma, \\ \mathrm{V}(\xi, \eta, \zeta, t) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_\sigma \left\{ \frac{d\frac{1}{r}}{dn} v(t) - \Sigma \mathrm{L}_\sigma'' \mathrm{A}_1^{-1} \mathrm{A}_3 u \right\} d\sigma, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

dove $\mathrm{L}_\sigma'', \dots, \mathrm{L}_\sigma''', \dots$ sono le espressioni analoghe alle (11), e dove $u(t)$, $v(t)$, $w(t)$ sono funzioni finite e continue dei punti di σ e del tempo t, date ad arbitrio. Le espressioni (12) formano una soluzione delle equazioni (1) in tutto il campo S; e se si considera sulla superficie σ un sistema di coordinate curvilinee α, β; e se si indicano con $\mathrm{U}(\alpha', \beta', t)$, $\mathrm{V}(\alpha', \beta', t)$, $\mathrm{W}(\alpha', \beta', t)$ rispettivamente ciò che divengono le (12), quando il punto $\mathrm{P} \equiv (\xi, \eta, \zeta)$ coincide col punto $\mathrm{P}' \equiv (\alpha', \beta')$ di σ, avremo, ripetendo i ragionamenti contenuti nel § 7 (Cap. II) della mia citata Memoria,

se il punto $\mathrm{P} \equiv (\xi, \eta, \zeta)$ *si avvicina indefinitamente al punto* $\mathrm{P}' \equiv (\alpha', \beta')$ *di* σ, *mantenendosi sempre nell'interno del campo finito* S, *varranno le formole*:

$$(13)\quad \begin{cases} \lim\limits_{\mathrm{P}=\mathrm{P}'} \mathrm{U}(\xi, \eta, \zeta, t) = u(\alpha', \beta', t) + \mathrm{U}(\alpha', \beta', t), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

per qualunque valore del tempo t.

Altri risultati analoghi si hanno, come estensione dei noti teoremi sui doppî strati e sugli strati semplici (cfr. mia cit. Memoria, §§ 7, 8, 9, 10 del Cap. II), che ci risparmiamo di enunciare.

Tutti i risultati fin qui considerati relativamente al sistema di equazioni integro-differenziali (1) possono ripetersi, con le dovute modificazioni, per il sistema aggiunto (1)′.

6. Per la determinazione di una soluzione u, v, w delle equazioni (1), nel campo S corrispondente a dati valori di queste funzioni nei punti di

σ durante un certo intervallo di tempo, osserviamo anzitutto che nel caso delle pseudo-tensioni ereditarie si ha, qualunque sia la funzione $F(t)$,

$$-A_1^{-1}A_3\,F(t) = -i\,F(t) + \int_{t_0}^{t} H(t,\tau)\,F(\tau)\,d\tau =$$
$$= -\frac{k}{2+k}\,F(t) + \int_{t_0}^{t} H(t,\tau)\,F(\tau)\,d\tau$$

con $H(t,\tau)$ funzione finita e continua dipendente da $\varphi(t,\tau)$ e $\psi(t,\tau)$.

Indichiamo poi con r' e con $L'(\alpha,\beta;\alpha',\beta')$, $M'(\alpha,\beta;\alpha',\beta')$, $N'(\alpha,\beta;\alpha',\beta')$ ciò che divengono rispettivamente r e le espressioni (11), quando il punto (x,y,z) coincide col punto (α,β) di σ ed il punto $P\equiv(\xi,\eta,\zeta)$ col punto $P'\equiv(\alpha',\beta')$; e poniamo:

$$X_\sigma'(\alpha,\beta;\alpha',\beta') = \frac{d\,\frac{1}{r'}}{dn} - \frac{k}{2+k}\,L'(\alpha,\beta;\alpha',\beta'),$$

$$Y_\sigma'(\alpha,\beta;\alpha',\beta') = -\frac{k}{2+k}\,M'(\alpha,\beta;\alpha',\beta'),\ \ldots$$

Risulterà:

$$U(\alpha',\beta',t) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma X_\sigma'(\alpha,\beta;\alpha',\beta')\,u.d\sigma +$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{t_0}^{t} H(t,\tau)\,d\tau \int_\sigma \Sigma L'(\alpha,\beta;\alpha',\beta')\,u(\tau)\,d\sigma;$$

e similmente, mediante notazioni analoghe, si avrà:

$$V(\alpha',\beta',t) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma X_\sigma''(\alpha,\beta;\alpha',\beta')\,u.d\sigma +$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{t_0}^{t} H(t,\tau)\,d\tau \int_\sigma \Sigma L''(\alpha,\beta;\alpha',\beta')\,u(\tau)\,d\sigma,$$

$$W(\alpha',\beta',t) = \cdots$$

Ciò premesso, si consideri il sistema di equazioni integrali:

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} &\varphi(\alpha',\beta',t) + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma X_\sigma'(\alpha,\beta;\alpha',\beta')\,\varphi(\alpha,\beta,t)\,d\sigma + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{t_0}^{t} H(t,\tau)\,d\tau \int_\sigma \Sigma L'(\alpha,\beta;\alpha',\beta')\,\varphi(\alpha,\beta,\tau)\,d\sigma = u(\alpha',\beta',t), \\ &\psi(\alpha',\beta',t) + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Sigma X_\sigma''(\alpha,\beta;\alpha',\beta')\,\varphi(\alpha,\beta,t)\,d\sigma + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{t_0}^{t} H(t,\tau)\,d\tau \int_\sigma \Sigma L''(\alpha,\beta;\alpha',\beta')\,\varphi(\alpha,\beta,\tau)\,d\sigma = v(\alpha',\beta',t), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Posto:

$$(15)\quad \begin{cases} u_1(\alpha', \beta', t) = u(\alpha', \beta', t) + \\ \quad - \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{t_0}^{t} \mathrm{H}(t, \tau)\, d\tau \int_\sigma \Sigma\, \mathrm{L}'(\alpha, \beta; \alpha', \beta')\, \varphi(\alpha, \beta, \tau)\, d\sigma, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

le equazioni (14) vengono a coincidere con le (1), al Cap. IV della mia citata Memoria; per conseguenza esse ammetteranno come quelle una soluzione unica, la quale può esprimersi mediante le seguenti formole:

$$(16)\quad \begin{cases} \varphi(\alpha', \beta', t) = u_1(\alpha', \beta', t) + \displaystyle\int_\sigma \Sigma\, \Xi'(\alpha, \beta; \alpha', \beta')\, u_1(\alpha, \beta, t)\, d\sigma, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

nelle quali $\Xi'(\alpha, \beta; \alpha, \beta')$, $\mathrm{H}'(\alpha, \beta; \alpha', \beta')$, ... sono i nuclei risolventi del detto sistema $(1)_1$, dedotti in virtù della teoria di Fredholm.

Facendo uso delle (15) e posto:

$$u(\alpha', \beta', t) + \int_\sigma \Sigma\, \Xi'(\alpha, \beta; \alpha', \beta')\, u(\alpha, \beta, t)\, d\sigma = \bar{u}(\alpha', \beta', t)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{1}{2\pi}\Big\{ \mathrm{L}'(\alpha, \beta; \alpha', \beta') + \int_\sigma [\Xi'(a, b; \alpha', \beta')\, \mathrm{L}'(\alpha, \beta; a, b) + \\ + \mathrm{H}'(a, b; \alpha', \beta')\, \mathrm{L}''(\alpha, \beta; a, b) + \cdots]\, d\sigma \Big\} = \mathrm{A}'(\alpha, \beta; \alpha', \beta'),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

le equazioni (16) divengono:

$$(16')\quad \begin{cases} \varphi(\alpha', \beta', t) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} \mathrm{H}(t, \tau)\, d\tau \int_\sigma \Sigma \mathrm{A}'(\alpha, \beta; \alpha', \beta')\, \varphi(\alpha, \beta, \tau)\, d\sigma = \bar{u}(\alpha', \beta', t), \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Col noto artificio di introdurre una funzione $\mathrm{K}(t, \tau)$, la quale per $\tau < t$ sia uguale ad $\mathrm{H}(t, \tau)$ e per $t \leq \tau < \mathrm{T}$ sia uguale allo zero, si ha che le equazioni (16′) possono considerarsi come un ordinario sistema di equazioni di tipo Fredholm a tre variabili α', β', t; sicchè possiamo ad esse applicare la nota teoria di Fredholm. In virtù di questa teoria bisogna scrivere il sistema omogeneo corrispondente al sistema (16′), che è equivalente al sistema omogeneo corrispondente al sistema (14), ed il sistema omogeneo aggiunto. Introducendo gli strati elastici aggiunti e le corrispondenti pseudotensioni ereditarie, e valendosi di ragionamenti analoghi a quelli contenuti nel § 2 (Cap. IV) della mia citata Memoria, si dimostra che il sistema omogeneo aggiunto del sistema (14), e quindi ancora il sistema omogeneo aggiunto del sistema (16′), non ammettono per $k \geq -\frac{2}{3}$ soluzione alcuna; allora neppure il sistema omogeneo corrispondente al sistema (16′) ammette soluzione alcuna. Di qui si deduce, in virtù della teoria di Fredholm, che il sistema (16′), ossia il sistema (14) per $k \geq \frac{2}{3}$ ammette una soluzione finita e continua $\varphi(\alpha', \beta', t)$, $\psi(\alpha', \beta', t)$, $\chi(\alpha', \beta', t)$ ed una solamente.

Ciò premesso, è facile dimostrare (¹), valendosi del teorema sui doppi strati generali, enunciato al § 5, e delle equazioni (14), che il sistema di pseudo-doppi strati elastici ereditari aventi per densità le funzioni $\varphi(\alpha', \beta', t)$, $\psi(\alpha', \beta', t)$, $\chi(\alpha', \beta', t)$, risolve per $k \geq -\frac{2}{3}$ il problema interno proposto.

Fisica. — *I conduttori a più periodi e la loro possibile applicazione nella pratica della telegrafia senza filo.* Nota del Corrisp. A. Garbasso.

Chimica fisica. — *Lo spettro di assorbimento della santonina bianca e gialla.* Nota del Corrisp. A. Piutti.

Le due Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sul vantaggio che presenta un'estenione delle funzioni di Green.* Nota della Sig.na A. M. Molinari, presentata dal Corrisp. A. Di Legge.

Il metodo delle immagini di Lord Kelvin, lascia speditamente risolvere il problema della Δ^2 per un campo limitato da due piani paralleli; esso si presta, infatti, ad una facile determinazione della cosiddetta funzione di Green relativa a tale campo. Ma dobbiamo, purtroppo, osservare che, non ostante l'eleganza del metodo e la semplicità del risultato, noi non possiamo contentarcene, per la lentissima convergenza della serie che esprime la funzione di Green.

(¹) Cfr. mia cit. Memoria, Cap. IV, § 3.