ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXI.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1912

sistema omogeneo corrispondente al sistema (16′), che è equivalente al sistema omogeneo corrispondente al sistema (14), ed il sistema omogeneo aggiunto. Introducendo gli strati elastici aggiunti e le corrispondenti pseudotensioni ereditarie, e valendosi di ragionamenti analoghi a quelli contenuti nel § 2 (Cap. IV) della mia citata Memoria, si dimostra che il sistema omogeneo aggiunto del sistema (14), e quindi ancora il sistema omogeneo aggiunto del sistema (16′), non ammettono per $k \geq -\frac{2}{3}$ soluzione alcuna; allora neppure il sistema omogeneo corrispondente al sistema (16′) ammette soluzione alcuna. Di qui si deduce, in virtù della teoria di Fredholm, che il sistema (16′), ossia il sistema (14) per $k \geq \frac{2}{3}$ ammette una soluzione finita e continua $\varphi(\alpha', \beta', t), \psi(\alpha', \beta', t), \chi(\alpha', \beta', t)$ ed una solamente.

Ciò premesso, è facile dimostrare [1], valendosi del teorema sui doppi strati generali, enunciato al § 5, e delle equazioni (14), che il sistema di pseudo-doppi strati elastici ereditari aventi per densità le funzioni $\varphi(\alpha', \beta', t)$, $\psi(\alpha', \beta', t)$, $\chi(\alpha', \beta', t)$, risolve per $k \geq -\frac{2}{3}$ il problema interno proposto.

Fisica. — *I conduttori a più periodi e la loro possibile applicazione nella pratica della telegrafia senza filo.* Nota del Corrisp. A. Garbasso.

Chimica fisica. — *Lo spettro di assorbimento della santonina bianca e gialla.* Nota del Corrisp. A. Piutti.

Le due Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sul vantaggio che presenta un'estenione delle funzioni di Green.* Nota della Sig.na A. M. Molinari, presentata dal Corrisp. A. Di Legge.

Il metodo delle immagini di Lord Kelvin, lascia speditamente risolvere il problema della Δ^2 per un campo limitato da due piani paralleli; esso si presta, infatti, ad una facile determinazione della cosiddetta funzione di Green relativa a tale campo. Ma dobbiamo, purtroppo, osservare che, non ostante l'eleganza del metodo e la semplicità del risultato, noi non possiamo contentarcene, per la lentissima convergenza della serie che esprime la funzione di Green.

(1) Cfr. mia cit. Memoria, Cap. IV, § 3.

Il metodo di Fourier (sul quale ho in corso di stampa un lavoro negli Annali dell'Accademia Politecnica di Oporto) conduce, è vero, ad un risultato di più breve apparenza; e, forse, anche effettivamente più breve dal punto di vista pratico: ma il vantaggio non è tanto, quanto quello che può ricavarsi da un procedimento, già da un pezzo esistente, che ha servito ad applicare il metodo delle immagini a casi ai quali pareva inapplicabile.

Tale metodo è un'estensione naturale del metodo di Green.

Esso si trova esposto in una Memoria del dott. Luciano Orlando: *Sopra alcuni problemi di Fisica Matematica*, inserita negli Atti della R. Accademia di Messina del 1905.

Noi vogliamo qui brevemente farne cenno.

Se $u(\xi, \eta, \zeta)$ e $H(\xi, \eta, \zeta)$ rappresentano, in un campo S a tre dimensioni, due funzioni regolari, valgono tanto il teorema di Green

$$(1) \qquad 4\pi\, u(x, y, z) = \int_\sigma \left(u \frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{r}\frac{du}{dn} \right) d\sigma - \int_S \frac{1}{r} \Delta^2 u \, dS$$

quanto il lemma

$$(2) \qquad 0 = \int_\sigma \left(u \frac{dH}{dn} - H \frac{du}{dn} \right) d\sigma + \int_S (u \Delta^2 H - H \Delta^2 u)\, dS\,,$$

intendendo per n la normale rivolta verso l'interno di S, e che gli integrali in dS, $d\sigma$ siano riferiti ad elementi che circondano $A(\xi, \eta, \zeta)$ e, rispettivamente estesi a tutto S od a tutto σ.

Per sottrazione, si ricava

$$(3) \qquad 4\pi\, u(x, y, z) = \int_\sigma \left[u \left(\frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{dH}{dn} \right) - \frac{du}{dn}\left(\frac{1}{r} - H \right) \right] d\sigma -$$
$$- \int_S \left[\left(\frac{1}{r} - H \right) \Delta^2 u + u \Delta^2 H \right] dS\,.$$

Supponiamo ora che della funzione u regolare in S sia noto

$\Delta^2 u$ in ogni punto del campo,

u in ogni punto del contorno:

allora risulta incognita nell'espressione (3) la quantità

$$(4) \qquad \int_\sigma \frac{du}{dn}\left(\frac{1}{r} - H \right) d\sigma + \int_S u \Delta^2 H \, dS$$

poichè incognite sono $(u)_S \left(\frac{du}{dn} \right)_\sigma$.

Se ora conosciamo una funzione H tale che nel secondo membro della (3) rimangano soltanto da determinarsi alcune *costanti*, allora diremo H *prima funzione ausiliare*.

Per esempio, se

$$\frac{1}{r} - H \quad \text{in ogni punto del contorno ,}$$
$$\Delta^2 H \quad \text{in ogni punto del campo}$$

fossero polinomî nelle coordinate del polo $A(x, y, z)$, anche la grandezza (4) sarebbe un polinomio nelle coordinate del polo. I coefficienti (*costanti*) si potrebbero calcolare facendo successivamente tendere il polo verso altrettanti punti del contorno (ove u è nota).

La nostra ipotesi è più generale di quella di Green, poichè, posto al contorno

$$\left(\frac{1}{r} - H\right)_\sigma = 0,$$

e nel campo $(\Delta^2 H)_s = 0$; la funzione regolare H diventa la funzione di Green.

Per un campo S limitato da due piani paralleli si determina facilmente la funzione di Green, cioè, dunque, la funzione ausiliare che verifica regolarmente la $\Delta^2 = 0$ in ogni punto, e acquista in ogni punto del contorno un valore eguale a quello ivi acquistato dalla funzione $\frac{1}{r}$ (che è invece discontinua nel polo).

Siano $\zeta = h$, $\zeta = -h$ i due rispettivi piani; sia $A_0(x, y, z)$ un polo in S, A_1 il punto simmetrico di A_0 rispetto a σ_1, e A'_1 il punto simmetrico di A_0 sispetto a σ_2; diremo in generale A_{2i} il punto simmetrico di A_{2i-1} rispetto a σ_2 (lasciando che i prenda i valori dei numeri naturali): e diremo A_{2i+1} il punto simmetrico di A_{2i} rispetto a σ_1.

In modo analogo A'_{2i+1}, A'_{2i} saranno fra di loro simmetrici rispetto a σ_2, e A'_{2i-1}, A'_{2i} rispetto al piano σ_1.

La distanza fra A_0 ed un punto A di coordinate (ξ, η, ζ) indichiamola con r; poi con r_ν, r'_ν le rispettive distanze di A da A_ν, A'_ν; cioè scriveremo

$$r_\nu^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + [\xi + (-1)^\nu (2h\nu - z)]^2 \tag{5}$$
$$r_\nu'^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + [\xi - (-1)^\nu (2h\nu + z)]^2 . \tag{6}$$

Ciò premesso, la serie

$$G_1 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu+1}}{r_\nu} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu+1}}{r'_\nu} \tag{7}$$

somma di due serie che, come è chiaro, convergono uniformemente in S, è la prima funzione di Green; noi la possiamo anche scrivere

$$G_1 = s_1 + s_1' , \tag{8}$$

avendo posto

$$s_1 = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4} + \cdots$$

$$s_1' = \frac{1}{r_1'} - \frac{1}{r_2'} + \frac{1}{r_3'} - \frac{1}{r_4'} + \cdots$$

Poichè le due serie s_1 , s_1' sono perfettamente analoghe, ci basterà considerare la prima.

Supponiamo di voler ottenere l'approssimazione 1/1000 nella valutazione della serie G_1 .

Si sa che i termini di s_1 sono, in valore assoluto, decrescenti, hanno i segni alternati, e che l'errore è più piccolo del modulo del primo termine trascurato. Chiamandolo r_ν , possiamo scrivere

$$r_\nu > 2h\nu , \tag{9}$$

cioè deve essere

$$2h\nu > 1000$$

Se ne ricava

$$\nu h > 500 . \tag{10}$$

Per $h = 1$ occorrerebbero, 500 termini della serie s_1 per avere l'approssimazione di 1/1000 che non ne occorrano meno si dimostra molto facilmente con considerazioni analoghe a quelle che seguiranno.

Per ovviare all'inconveniente di dover sommare tanti termini per avere una approssimazione melto modesta, osserviamo che l'introduzione delle funzioni ausiliari, più generali delle funzioni di Green, lascia raggiungere, con maggior rapidità, un'approssimazione migliore.

Scriviamo

$$\left[\frac{1}{r_1} - \left(\frac{1}{r_1}\right)_0\right] - \left[\frac{1}{r_2} - \left(\frac{1}{r_2}\right)_0\right] - \left[\frac{1}{r_3} - \left(\frac{1}{r_3}\right)_0\right] \tag{11}$$

intendendo per $(r_\nu)_0$ il valore di r_ν in un polo ausiliare (per esempio a metà distanza fra i due piani); essa equivarrà per la convergenza a

$$\sum_\nu \frac{k}{(r_\nu)^2} .$$

Ma possiamo anche proseguire, adoperando, per esempio la serie

$$\sum_\nu \left\{ \frac{1}{r_\nu} - \left(\frac{1}{r_\nu}\right)_0 - z \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right)_0 - \cdots - \frac{z^{n-1}}{\pi(n-1)} \left(\frac{\partial^{n-1} \frac{1}{r_\nu}}{\partial z^{n-1}}\right)_0 \right\} . \tag{12}$$

Osserviamo che il termine generale di questa serie rappresenta

$$\frac{z^n}{\pi(n)}\left(\frac{\partial^n \frac{1}{r}}{\partial z^n}\right)_m \tag{13}$$

dove m denota un opportuno punto intermedio: esso non supera dunque certamente, in valore assoluto, il valore

$$\frac{h^n}{(r_\nu)_0^{n+1}} \tag{14}$$

come si può vedere dalla formula

$$\left|\frac{\partial^n \frac{1}{r}}{\partial t^n}\right| \leq \frac{\pi(n)}{r^{n+1}},$$

che è la (6) del citato lavoro del dott. Orlando.

La formula (9) mostra allora che, se consideriamo la serie

$$\sum \frac{h^n}{(2h\nu)^{n+1}} \tag{15}$$

noi avremo considerato una serie maggiorante. L'integrale definito

$$\int_m^\infty \frac{h^n}{(2hx)^{n+1}}\,dx = \frac{n}{2^{n+1}\,h\,m^n}$$

serve (come è noto da un teorema generale di Cauchy) a dare un'idea dell'approssimazione del resto della serie (15).

È facile vedere con quanta rapidità si possa, disponendo opportunamente di m, o di n, o di m, n insieme, raggiungere la richiesta approssimazione.

Anche nel caso semplicissimo del semispazio, si può sostituire alla funzione di Green (rappresentata dall'inversa della distanza del punto mobile dal simmetrico del polo) una funzione ausiliare del tipo indicato dal termine che si trova nella formula (12).

Con ciò non si semplifica certamente la funzione di Green, che è semplicissima, essendo costituita da un termine solo, ma si rende più facilmente valutabile per approssimazione l'integrale sotto cui questa funzione verrà a figurare nella formula risolutiva, nel caso (frequentissimo) nel quale la valutazione di questo integrale non si possa fare esattamente.