ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1912

Modificando convenientemente il rapporto tra i denti delle due ruote si potrà subordinare invece il pendolo di tempo siderale a quello di tempo medio; tuttavia il primo sistema sarà preferito, essendo il tempo siderale la conseguenza immediata della rotazione perfettamente uniforme della terra e perciò molto più agevole a determinarsi del tempo medio, non rappresentato dal movimento di nessun corpo celeste.

Matematica. — *Sopra alcune questioni riguardanti due fasci di curve dati in una superficie algebrica.* Nota del prof. M. Pannelli, presentata dal Corrisp. G. Castelnuovo.

Meccanica celeste. — *Sulle orbite periodiche.* Nota di Leonida Tonelli, presentata dal Socio S. Pincherle.

Economia matematica. — *Contributo alla teoria matematica della dinamica economica.* Nota del dott. L. Amoroso, presentata dal Corrisp. M. Pantaleoni.

Le precedenti Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Sulla misura del calore specifico dei metalli a temperature elevate.* Nota di O. M. Corbino, presentata dal Socio P. Blaserna.

1. Ho avuto due volte l'occasione di riferire all'Accademia [1] su alcune proprietà dei filamenti molto sottili percorsi da correnti elettriche variabili.

Ebbi allora a dimostrare che alle oscillazioni periodiche della potenza elettrica consumata nel filo corrispondono variazioni periodiche nella sua temperatura, e quindi nella sua resistenza; le oscillazioni di temperatura si compiono con uno spostamento di fase rispetto a quelle della potenza; tale ritardo di fase, e la escursione massima, dipendono da alcune costanti caratteristiche del filo, in modo che la teoria esattamente prevede.

Le variazioni periodiche di resistenza, con pulsazione doppia di quella della f. e. m., creano un terzo armonico nella corrente che traversa il filo, e la teoria ne prevede l'ampiezza e la fase in funzione degli elementi sopra

[1] O. M. Corbino, Rend. Lincei, XIX, 1° sem , pag. 133, 1910; ibid. XX, 1° sem., pag. 222, 1911.

indicati. L'esperienza, eseguita con un particolare dispositivo delicatissimo atto all'esame col tubo di Braun del terzo armonico introdotto, diede il risultato previsto, e si potè dalle fotografie delle curve di Lissajous ottenute dedurre il valore di $\frac{c}{a}$, cioè del rapporto tra la capacità calorifica e il coefficiente termico di variabilità della resistenza del filo, nei limiti in cui ne variava la temperatura.

L'esperienza mi aveva già dato la conferma di un'altra previsione della teoria, che cioè il filamento possiede un effetto parzialmente raddrizzatore sulla corrente alternata, e dà luogo perciò alla produzione di una componente di corrente continua, quando la f. e. m. agente non è puramente sinusoidale, ma contiene il secondo armonico.

Il risultato naturale di tutte queste ricerche doveva essere lo studio sistematico dei valori di $\frac{c}{a}$ per diversi filamenti, e a tutte le temperature possibili; quel rapporto rappresenta, come ebbi allora a notare, una costante fisica ben definita del corpo, indipendente dalla conoscenza così difficile della temperatura vera di esso; e precisamente esprime il rapporto tra la quantità di calore assorbita dal filo nel riscaldarsi e la corrispondente alterazione *relativa* della resistenza. Così si ottenne allora che alla temperatura di regime della lampada Osram occorrono circa 0,1 piccole calorie per scaldare di tanto ogni grammo della sua massa che la sua resistenza risulti variata di un millesimo. Un dato numerico di questo genere resta assolutamente incontrollabile, non esistendo altri metodi che permettano di ottenere indicazioni qualsiansi sulla capacità calorifica del filo a quelle temperature elevate. Ma ciò accresce l'interesse a estendere le ricerca, atta a fornirci dei dati inaccessibili per altra via. Purtroppo la ricerca col tubo Braun richiede un numero rilevante di lampade, con funzionamento a temperatura elevata; diminuendo la temperatura di funzionamento l'ampiezza del terzo armonico diviene invero troppo piccola per essere misurata; occorre inoltre che il filamento sia di estrema sottigliezza, qualora non si possa abbassare convenientemente la frequenza della corrente alternata.

2. Dopo una serie di tentativi in varie direzioni mi son fermato a un nuovo metodo che passo a descrivere, e che sembra il più adatto a una ricerca sistematica, perchè di sensibilità quasi illimitata, e di impiego agevole e sicuro, richiedendo solo una lampadina montata col filo in esame, e un ponte di Wheatstone.

Si considerano in questo metodo i processi termici che hanno luogo nel filamento quando trovandosi esso inserito, oltre a una resistenza zavorra R, in un circuito nel quale agisce la f. e. m. e, si opera una piccola e brusca diminuzione $-\Delta R$ nella resistenza R.

La temperatura del filamento passa da T_0 a $T_0 + \Theta$; ma il passaggio non è istantaneo a causa della sua inerzia calorifica.

Indicando con ϑ l'eccesso raggiunto al tempo t sulla temperatura iniziale T_0, con c la capacità calorifica (in unità meccaniche), con a il coefficiente di variazione della resistenza r_0 con la temperatura, fra i limiti T_0 e $T_0 + \Theta$ e riferito a r_0, ed esprimendo infine con $f(T)$ la quantità di energia emessa per unità di tempo alla temperatura attuale $T = T_0 + \vartheta$, si avrà:

$$f(T_0) = \frac{e^2}{(R + r_0)^2}\, r_0 = W \tag{1}$$

$$c\,\frac{d\vartheta}{dt} + f(T_0 + \vartheta) = \frac{e^2 r_0 (1 + a\vartheta)}{[R - \Delta R + r_0(1 + a\vartheta)]^2}\,. \tag{2}$$

Si noti che a denota, come si è detto, il coefficiente di variazione riferito alla resistenza r_0 a T_0, e non alla resistenza allo zero centigrado. Il coefficiente a, che fu da me già adoperato nelle due Note citate, si identifica perciò col coefficiente termico *vero* considerato recentemente dal Pirani (1).

Il numero $a\vartheta$ rappresenta così la variazione relativa al tempo t della resistenza iniziale r_0: essa sarà molto piccola se si suppone piccola ΔR; noi riterremo perciò trascurabili i termini di second'ordine in $\dfrac{\Delta R}{R + r_0}$ e in $a\vartheta$. Si potrà allora scrivere:

$$c\,\frac{d\vartheta}{dt} + f\,(T_0 + \vartheta) = \frac{e^2}{(R + r_0)^2}\left[1 + 2\,\frac{\Delta R - r_0\, a\vartheta}{R + r_0} + a\vartheta\right].$$

Si sviluppi $f(T_0 + \vartheta)$ in serie di Taylor limitandola al 2° termine; e si tenga presente la (1) nella quale W denota l'energia consumata nelle condizioni iniziali. Si avrà:

$$c\,\frac{d\vartheta}{dt} + \vartheta f'(T_0) = W\left(1 - 2\,\frac{r_0}{R + r_0}\right) a\vartheta + 2W\,\frac{\Delta R}{R + r_0}$$

o anche, ponendo

$$P = W\,\frac{r_0 - R}{r_0 + R} + \frac{1}{a} f'(T_0) \tag{3}$$

potremo scrivere

$$\frac{c}{a}\,\frac{d\vartheta}{dt} + P\vartheta = 2\,\frac{W}{a}\,\frac{\Delta R}{r_0 + R}.$$

Questa relazione ci dice che la temperatura aumenta nel filamento, a partire da T_0, con la stessa legge con cui aumenta la corrente nel periodo variabile in un circuito induttivo di resistenza P e autoinduzione $\dfrac{c}{a}$.

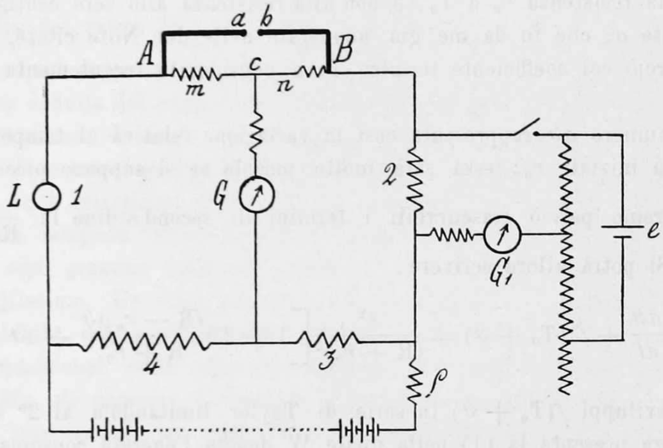
(1) Pirani v. M., Berichte der Deutsch. Physik. Gesell., XIII Jahrg., pag. 929, 1911.

E perciò, detto Θ l'accrescimento totale di temperatura al di sopra della temperatura iniziale T_0, si avrà

$$\vartheta = \Theta\left(1 - e^{-\frac{P}{c/a}t}\right). \tag{4}$$

Si conserva cioè ancora in questo caso l'analogia tra le variazioni di temperatura del filamento e la corrente nei circuiti induttivi, analogia messa in luce nelle mie precedenti Note per il caso delle f. e. m. alternate.

3. Si supponga adesso che il filamento costituisca una delle branche di un ponte di Wheatstone, e che a un certo istante, mentre il ponte è in equilibrio, si faccia corto circuito tra i punti a e b, mettendo così fuori delle branche del ponte le resistenze m, n.



Si modificherà, allora, la resistenza complessiva del tratto 1, 2, e perciò muterà la temperatura e la resistenza del filamento L, poichè esso viene percorso da una corrente alquanto più intensa. Ma scegliendo opportunamente le resistenze m ed n, soppresse a destra e a sinistra di C, si può facilmente ottenere che malgrado la mutata resistenza di L si abbia ancora l'equilibrio *finale* nel ponte, poichè vengono anche mutate le resistenze totali dei rami 1 e 2. Si siano realizzate queste condizioni di duplice equilibrio *permanente* nel ponte; comunque, cioè, si trovi chiuso o aperto il corto circuito $a\,b$. La chiusura di $a\,b$ modifica bruscamente la resistenza zavorra del circuito di cui fa parte la lampada, e modifica contemporaneamente le resistenze delle branche 1 e 2 del ponte; ma poichè il filamento non assume istantaneamente la nuova temperatura, per cui è regolato l'equilibrio, in tutto il breve tempo impiegato a raggiungerla il galvanometro sarà traversato da una corrente variabile, che comunicherà all'equipaggio un impulso temporaneo, come se una delle branche fosse provveduta di forte auto-induzione.

Si può facilmente calcolare la quantità di elettricità che traversa il galvanometro in questo periodo che precede il nuovo regime di equilibrio. Sia i_g l'intensità della corrente costante che traverserebbe il galvanometro per una data variazione Δr di resistenza nel ramo 1 del ponte, a tasto $a\,b$ chiuso, e si ponga

$$i_g = k\Delta r\,.$$

L'alterazione Δr di resistenza nel ramo 1, rispetto al regime finale per cui è stabilito l'equilibrio con la chiusura di $a\,b$, è data da

$$\Delta r = r_0\, a(\vartheta - \Theta),$$

ove ϑ è espresso dalla (4).

Si avrà perciò nel galvanometro la corrente variabile

$$i_g = k r_0\, a\, \Theta\, e^{-\frac{\mathrm{P}}{c/a}t}$$

e perciò nell'intero periodo variabile il galvanometro sarà traversato dalla quantità di elettricità

$$q = \int_0^\infty i_g\, dt = k r_0\, a\, \Theta\, \frac{c/a}{\mathrm{P}}\,.$$

Si indichi con I la corrente permanente che si avrebbe al galvanometro per la variazione di resistenza finale $r_0\, a\, \Theta$ avvenuta nel filamento, qualora non la si fosse compensata col giuoco delle resistenze $m\,,\,n$ a sinistra e a destra di C. Sarà

$$\mathrm{I} = k r_0\, a\, \Theta$$

e perciò

$$q = \mathrm{I}\,\frac{c/a}{\mathrm{P}}$$

da cui

$$\frac{c}{a} = \mathrm{P}\,\frac{q}{\mathrm{I}}\,.$$

La misura degli elementi P, q e I ci darà quindi, in modo semplicissimo, il valore cercato di $\dfrac{c}{a}$, ricavabile così intorno a una temperatura T_0 qualsiasi. Si noti infine che in luogo del corto circuito assoluto, che sopprime le resistenze $m\,,\,n$, si può, attraverso al tasto $a\,b$, derivare un circuito di resistenza non nulla; al variare di questa si potranno produrre diverse variazioni, sempre piccole, nell'intensità della corrente che traversa la lampada, e quindi diverse variazioni finali Θ della sua temperatura T_0.

4. *Misura di q e di* I. — Si può ricorrere all'unico galvanometro inserito nel ponte, purchè lo si sia tarato, *nelle condizioni attuali di smorzamento*, per le correnti e per le quantità di elettricità. Con ciò la misura di q non offre alcuna difficoltà, bastando solo regolare le resistenze m, n in modo che aprendo o chiudendo il tasto $a\,b$ si abbia una deviazione brusca al galvanometro, ma questo ritorni subito a zero.

Per la misura di I, corrente permanente che si avrebbe nel galvanometro per la stessa variazione finale non compensata $r_0\, a\, \Theta$ di resistenza nel ramo 1, ho proceduto nel modo seguente. Con un dispositivo potenziometrico connesso alla piccola resistenza 2 del ponte si equilibrava la tensione ai poli di 2, servendosi di una tensione derivata su un circuito percorso dalla corrente di una coppia di accumulatori e.

Il galvanometro G_1 serviva a constatare la compensazione. Chiuso il tasto $a\,b$ (fig. 1) aumentava un poco la corrente nel ramo 2, e il galvanometro G_1 deviava fortemente; si inseriva allora una resistenza crescente ϱ, nel circuito principale, regolandola in modo che il galvanometro G_1 della compensazione tornasse a zero. In tal modo con la soppressione della resistenza ϱ, a tasto $a\,b$ chiuso, o con la chiusura del tasto $a\,b$, mentre la resistenza ϱ è soppressa, si produceva l'identica variazione della corrente nella lampada; ma mentre la prima manovra perturbava l'equilibrio nel ponte *permanentemente*, la seconda lo perturbava solo nei primi istanti che seguono la chiusura del tasto $a\,b$. La prima deviazione permanente dava l'intensità I che comparisce nella formola, la seconda, impulsiva, dava invece la quantità q.

5. *Misura di* P. — Resta solo da misurare P per avere la grandezza cercata.

Abbiamo intanto per la (3)

$$P = W\frac{r_0 - R}{r_0 + R} + \frac{1}{a}\left(\frac{dW}{dT}\right)_{T_0} = W\frac{r_0 - R}{r_0 + R} + r_0\frac{dW}{dr_0},$$

poichè

$$a = \frac{1}{r_0}\frac{dr_0}{dT}.$$

Supponiamo che a una variazione $\varDelta i$ della intensità della corrente nella lampada corrisponda la variazione permanente $\varDelta r_0$ della resistenza di questa. Sarà nelle prime condizioni di regime del filamento

$$W = i^2 r_0$$

e nelle successive

$$W + \varDelta W = (i + \varDelta i)^2 (r_0 + \varDelta r_0).$$

Si ottiene così

$$r_0 \frac{\Delta W}{\Delta r_0} = W\left(1 + 2\frac{\Delta i/i}{\Delta r_0/r_0}\right)$$

e quindi

$$P = 2W\left[\frac{r_0}{r_0 + R} + \frac{\Delta i/i}{\Delta r_0/r_0}\right].$$

E si riconosce subito che la disposizione sperimentale adottata fornisce tosto tutti gli elementi che occorrono per la misura di P, *in perfetta indipendenza dalla legge sconosciuta con cui il filamento perde energia alle varie temperature*. E infatti, mantenendo chiuso il tasto ab, basterà inserire ed escludere, successivamente, una resistenza ϱ nel circuito principale, e misurare col sistema compensatore derivato su 2 la variazione relativa $\Delta i/i$ della intensità, e col ponte la variazione relativa corrispondente della resistenza $\Delta r_0/r_0$ nel ramo della lampada. Quanto a W essa risulta immediatamente determinata, solo che si inserisca nel ramo 1 della lampada un buon amperometro.

6. *Condizioni sperimentali*. — Descriverò le condizioni quali sono state da me disposte per lo studio di una lampadina Osram da 32 candele e 105 volt.

La batteria è costituita da 50 accumulatori; si prende cura che altre correnti non ne siano distratte nel tempo della misura, poichè si manifesta uno squilibrio nel ponte a ogni variazione anche lieve della tensione.

Le branche 2, 3, 4 (fig. 1) hanno il valore rispettivamente di 4, 3900, 50 ohm. La branca 3 è variabile per decimi di ohm, ed è quella che si manovra per raggiungere l'equilibrio.

Delle resistenze m ed n la prima è variabile in modo continuo fino a 10 ohm; la seconda è fissa e molto piccola.

Il galvanometro è un ottimo aperiodico Siemens e Halske a bobina mobile; questa ha circa 25 ohm di resistenza, ma si aggiungono in serie circa 1200 ohm, con che la sensibilità è ancora più che sufficiente, e si attenua lo smorzamento.

In queste condizioni di smorzamento, cioè con l'equipaggio chiuso su circa 1200 ohm, si determina la sensibilità dell'apparecchio al passaggio di un micro-ampère o alla scarica di un micro-coulomb.

Come si riconosce dalla (4), l'intensità decorre nel ramo del galvanometro secondo un'esponenziale, la cui costante di rapidità è $\frac{P}{c/a}$. E poichè nel caso mio questo rapporto era circa 35, già dopo una piccola frazione di secondo la quantità di elettricità è passata quasi interamente. Non occorreva perciò ricorrere ad un galvanometro con grande periodo di oscillazione, essendosi verificato che con scariche esponenziali della stessa rapidità esso conservava la sensibilità normale.

Trascrivo qui i risultati di una misura che può eseguirsi, disposte bene le cose, in breve tempo.

Lampadina Osram da 32 candele, e 105 volt. Tensione agli estremi $V = 95$ volt; $i = 0,310$ ampère:

$$R = 5 \ ; \ \Delta i/i = \frac{11,7}{1000} \ ; \ \frac{\Delta r}{r} = \frac{8,4}{1000} \ ; \ P = 140 \, .$$

Dalle deviazioni ottenute si deduce:

$$\frac{c}{a} = P \frac{q}{I} = 4,0 .$$

Una determinazione a 103 Volt diede il valore

$$\frac{c}{a} = 4,38$$

che è in ottimo accordo con quello ottenuto l'anno precedente per mezzo del tubo Brau (4,4) alla stessa tensione di 103 Volt.

Di maggior interesse sono i risultati ottenuti sperimentando con un filamento di nota costituzione, come quello delle lampade a tungsteno; poichè per questi filamenti, e così anche per quelli di platino e di tantalio, esistono delle misure assai pregevoli di Pirani, da cui si può desumere il valore del coefficiente termico a; e quindi, noto il rapporto $\frac{c}{a}$, si può calcolare la capacità calorifica c a diverse temperature. Ma richiedendosi per la discussione dei risultati tutto un ordine di considerazioni diverso, ne riferirò all'Accademia in un'altra Nota.

Fisica. — *Le costanti termiche del tungsteno ad alta temperatura.* Nota di O. M. Corbino, presentata dal Socio P. Blaserna.

In una Nota precedente ho esposto all'Accademia la teoria e la realizzazione di un metodo elettrico per la misura della capacità calorifica di un filamento sottile conduttore; esso è fondato sullo studio, col ponte di Wheatstone, del periodo variabile nel quale, per una brusca e piccola diminuzione della resistenza complessiva nel circuito contenente il filamento, la temperatura di questo si porta dalla temperatura T_0 a quella $T_0 + \Theta$, poco diversa. Il metodo fu applicato allo studio di una lampadina Osram, per la quale avevo in precedenza ottenuto, con un metodo elettrico più indiretto, il