ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1912

Fisica Matematica. — *Sulla distribuzione della massa nell'interno dei pianeti.* Nota del Corrisp. G. LAURICELLA.

Il metodo, comunissimo nelle questioni di Fisica-matematica, che generalmente si segue per lo studio della struttura dei pianeti, consiste nel fare alcune ipotesi, suggerite dall'osservazione e dall'intuizione, sulla loro forma e sulla distribuzione della massa nel loro interno, e nel trarre poi da tali ipotesi la maggior copia di conseguenze. Finchè queste conseguenze non contradicono ai dati dell'osservazione, le ipotesi fatte saranno dette plausibili; mentre saranno rigettate, non appena si sarà riscontrata qualche incompatibilità. In questo modo i risultati che fin ora si hanno sulla distribuzione della massa nell'interno dei pianeti, sono quasi tutti negativi.

Tali risultati negativi, pur avendo il loro valore, non apportano sempre un vero progresso nella questione; mentre di maggiore interesse sono generalmente quei risultati, i quali stabiliscono delle condizioni analitiche necessarie e sufficienti a cui deve soddisfare la funzione densità, affinchè certi fatti, stabiliti dall'osservazione o in qualsiasi altro modo, siano verificati. Infatti qualunque sia l'ipotesi che si fa sulla variabilità della densità nell'interno dei pianeti, in armonia con le condizioni analitiche stabilite, non potrà mai aversi incompatibilità con i fatti che a queste condizioni hanno dato luogo.

Una condizione necessaria e sufficiente sulla espressione analitica della densità si ottiene facendo il Δ^2 della formola (2) [o (2)'] della mia Nota: *Sulla funzione potenziale di spazio corrispondente ad una assegnata azione esterna.* Essa pone in evidenza il contributo che la conoscenza dell'azione esterna del pianeta apporta sulla determinazione della densità.

Ora ci si può domandare: 1°) qual contributo dà sulla determinazione della densità la conoscenza del moto del pianeta, supposto rigido, attorno al proprio baricentro? 2°) qual contributo totale dà sulla determinazione della densità la conoscenza dell'azione esterna del pianeta e del suo moto attorno al baricentro?

Nella presente Nota mi propongo appunto di rispondere a queste due domande. In un primo paragrafo premetterò l'analisi relativa alla risoluzione di un particolare sistema di equazioni integrali, dal quale, come si vedrà nel secondo paragrafo, si possono far dipendere le due quistioni propostemi.

§ 1.

1. Siano dati i costanti qualsiasi $A_1, A_2, \dots A_i$; e siano pure date, in un qualsiasi campo finito τ, i funzioni $u_1, u_2, \dots u_i$ non identicamente nulle,

che per semplicità supporremo finite e continue [1]. Ci proponiamo di trovare l'espressione analitica più generale di una funzione ϱ, la quale soddisfaccia al sistema di equazioni integrali di 1ª specie:

$$(1)\qquad \int_\tau u_s\,\varrho\,d\tau = A_s\,,\quad (s = 1\,,2\,,\ldots i)\,.$$

Posto:

$$\int_\tau u_\sigma\,u_s\,d\tau = v_{\sigma s}\,,$$

$$D = \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & \ldots & v_{1i} \\ v_{21} & v_{22} & \ldots & v_{2i} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_{i1} & v_{i2} & \ldots & v_{ii} \end{vmatrix},$$

$$D_s = \begin{vmatrix} v_{11} \ldots v_{1(s-1)} & u_1 & v_{1(s+1)} \ldots v_{1i} \\ v_{21} \ldots v_{2(s-1)} & u_2 & v_{2(s+1)} \ldots v_{2i} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ v_{i1} \ldots v_{i(s-1)} & u_i & v_{i(s+1)} \ldots v_{ii} \end{vmatrix},$$

si ha ovviamente:

$$\int_\tau D_s\,u_\sigma\,d\tau = \begin{cases} D & \text{per } s = \sigma\,, \\ 0 & \text{per } s \neq \sigma\,; \end{cases}$$

e quindi, supposto $D \neq 0$, e posto:

$$(2)\qquad \varrho = \pi + \frac{1}{D}\left\{\sum_1^i{}_\sigma D_\sigma\left(A_\sigma - \int_\tau u_\sigma\,\pi\,d\tau\right)\right\}$$

con π funzione arbitraria atta all'integrazione nel campo τ, si verifica subito che la (2) soddisfa al sistema (1). È poi evidente che, viceversa, qualunque soluzione del sistema (1) può mettersi sotto la forma (2). Adunque, *se il determinante* D *è diverso da zero, la soluzione generale del sistema di equazioni integrali* (1) *è data dall'espressione* (2) *di* ϱ, *nella quale* π *è una funzione arbitraria atta all'integrazione nel campo* τ.

2. Se $D = 0$, sia $p \geq 1$ la caratteristica di D. Allora esisteranno $i - p$ sistemi linearmente indipendenti, ed $i - p$ solamente, di valori costanti:

$$(3)\qquad \alpha_{1s}\,,\alpha_{2s}\,,\ldots\,\alpha_{is}\,,\quad [s = 1\,,2\,,\ldots\,(i-p)]\,,$$

[1] Basterebbe supporre che siano integrabili secondo Lebesgue.

tali che:

$$(4)\qquad \begin{cases} \alpha_{1s}\,v_{11}+\alpha_{2s}\,v_{12}+\cdots+\alpha_{is}\,v_{1i}=0\,, \\ \alpha_{1s}\,v_{21}+\alpha_{2s}\,v_{22}+\cdots+\alpha_{is}\,v_{2i}=0\,, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{is}\,v_{i1}+\alpha_{2s}\,v_{i2}+\cdots+\alpha_{is}\,v_{ii}=0\,. \end{cases}$$

Da queste risulta:

$$\begin{aligned} \int_\tau (\alpha_{1s}\,u_1+\alpha_{2s}\,u_2+\cdots+\alpha_{is}\,u_i)^2\,d\tau &= \\ =\alpha_{1s}(\alpha_{1s}\,v_{11}+\alpha_{2s}\,v_{12}+\cdots+\alpha_{is}\,v_{1i}) &+ \\ +\,\alpha_{2s}(\alpha_{1s}\,v_{21}+\alpha_{2s}\,v_{22}+\cdots+\alpha_{is}\,v_{2i}) &+ \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ +\,\alpha_{is}(\alpha_{1s}\,v_{i1}+\alpha_{2s}\,v_{i2}+\cdots+\alpha_{is}\,v_{ii}) &= 0\,; \end{aligned}$$

e quindi, in virtù della continuità delle $u_1, u_2, \ldots u_i$, *si avrà in tutto il campo* τ;

$$(5)\qquad \alpha_{1s}\,u_1+\alpha_{2s}\,u_2+\cdots+\alpha_{is}\,u_i=0\,,\quad (s=1\,,2\,,\ldots\,i-p).$$

E poichè gli $i-p$ sistemi (3) sono linearmente indipendenti, avremo che *le* $i-p$ *relazioni lineari omogenee* (5) *tra le* $u_1, u_2, \ldots u_i$ *saranno anch'esse linearmente indipendenti.*

3. Viceversa supponiamo che le $u_1, u_2, \ldots u_i$ siano legate da $i-p$ relazioni, ed $i-p$ solamente, linearmente indipendenti come le (5). Allora gli $i-p$ sistemi di costanti $\alpha_{1s}, \alpha_{2s}, \ldots \alpha_{is}$ saranno linearmente indipendenti. Inoltre dalle (5) si avrà:

$$0=\int_\tau u_\sigma(\alpha_{1s}\,u_1+\alpha_{2s}\,u_2+\cdots+\alpha_{is}\,u_i)\,d\tau=\alpha_{1s}\,v_{\sigma 1}+\alpha_{2s}\,v_{\sigma 2}+\cdots+\alpha_{is}\,v_{\sigma i}\,,$$

ossia gli $i-p$ sistemi di costanti $\alpha_{1s}, \alpha_{2s}, \ldots \alpha_{is}$ soddisferanno al sistema di equazioni (4); e quindi la caratteristica del determinante è non maggiore di p. Per altro la caratteristica di D non può essere minore di p; perchè altrimenti, in virtù del risultato precedente, dovrebbero sussistere tra le $u_1, u_2, \ldots u_i$ più di $i-p$ relazioni lineari omogenee e linearmente indipendenti, contrariamente all'ipotesi fatta; quindi *la caratteristica di* D *deve essere uguale a* p.

Riepilogando si ha: *se la caratteristica del determinante* D *è* p, *le funzioni* $u_1, u_2, \ldots u_i$ *saranno legate da* $i-p$ *relazioni lineari omogenee e linearmente indipendenti; e viceversa.*

4. Il risultato precedente si può enunciare dicendo che se p è la caratteristica di D, p delle funzioni $u_1, u_2, \ldots u_i$, e p solamente, saranno li-

nearmente indipendenti. Supponendo, per fissare le idee, che queste p funzioni siano le $u_1, u_2, \ldots u_p$, avremo:

$$\varDelta = \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & \ldots & v_{1p} \\ v_{21} & v_{22} & \ldots & v_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_{p1} & v_{p2} & \ldots & v_{pp} \end{vmatrix} \neq 0,$$

$$(6) \quad \begin{cases} u_{p+1} = a_{11} u_1 + a_{12} u_2 + \cdots + a_{1p} u_p , \\ \cdots\cdots\cdots \\ u_i = a_{(i-p)1} u_1 + a_{(i-p)2} u_2 + \cdots a_{(i-p)p} u_p \end{cases}$$

con a_{rs} costanti determinate.

In queste condizioni se esiste una soluzione del sistema di equazioni integrali (1), in virtù delle (6), si deve necessariamente avere:

$$(7) \quad \begin{cases} A_{p+1} = a_{11} A_1 + a_{12} A_2 + \cdots + a_{1p} A_p , \\ \cdots\cdots\cdots \\ A_i = a_{(i-p)1} A_1 + a_{(i-p)2} A_2 + \cdots + a_{(i-p)p} A_p . \end{cases}$$

Si consideri il sistema di equazioni integrali:

$$(1)' \qquad \int_\tau \varrho\, u_s\, d\tau = A_s , \quad (s = 1, 2, \ldots p).$$

Poichè è $\varDelta \neq 0$, posto:

$$\varDelta_s = \begin{vmatrix} v_{11} & \ldots & v_{1(s-1)} & u_1 & v_{1(s+1)} & \ldots & v_{1p} \\ v_{21} & \ldots & v_{2(s-1)} & u_2 & v_{2(s+1)} & \ldots & v_{2p} \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ v_{p1} & \ldots & v_{p(s-1)} & u_p & v_{p(s+1)} & \ldots & v_{pp} \end{vmatrix},$$

la soluzione generale del sistema (1)' sarà data da

$$(2)' \qquad \varrho = \pi + \frac{1}{\varDelta} \left\{ \sum_{1}^{p}{}_{\sigma}\, \varDelta_\sigma \left(A_\sigma - \int_\tau u_\sigma\, \pi\, d\tau \right) \right\}$$

con π funzione arbitraria atta all'integrazione nel campo τ.

Supposte soddisfatte le condizioni (7), in virtù delle (6), si avrà poi:

$$\begin{aligned} \int_\tau \varrho\, u_{p+t}\, d\tau &= a_{t1} \int_\tau \varrho\, u_1\, d\tau + a_{t2} \int_\tau \varrho\, u_2\, d\tau + \cdots + a_{tp} \int_\tau \varrho\, u_p\, d\tau = \\ &= a_{t1} A_1 + a_{t2} A_2 + \cdots + a_{tp} A_p = \\ &= A_{p+t} , \end{aligned}$$

$$(t = 1, 2, \ldots, i - p).$$

La (2)′ *rappresenterà quindi la soluzione più generale del sistema di equazioni integrali* (1).

Riepilogando si ha: *se* p *è la caratteristica del determinante* D, p *e* p *solamente delle funzioni* $u_1, u_2, \ldots u_i$ *saranno linearmente indipendenti: se* $u_1, u_2, \ldots u_p$ *sono le* p *funzioni linearmente indipendenti, se le* (6) *esprimono le* $u_{p+1}, u_{p+2}, \ldots u_i$ *mediante le* $u_1, u_2, \ldots u_p$; *condizione necessaria e sufficiente affinchè il sistema di equazioni integrali* (1) *ammetta una soluzione è che le* $A_1, A_2, \ldots A_i$ *soddisfacciano alle condizioni* (7); *se queste condizioni sono soddisfatte, la soluzione più generale del sistema* (1) *sarà data dall'espressione* (2)′ *di* ϱ, *nella quale* π *è una funzione arbitraria del campo* τ *atta all'integrazione.*

5. Ci proponiamo ora di determinare le relazioni (6), e quindi ancora le condizioni (7), nell'ipotesi sempre che $u_1, u_2, \ldots u_p$ siano linearmente indipendenti, ossia nell'ipotesi che $\varDelta$ sia il minore simmetrico di ordine più alto che non si annulla nel determinante D.

A tal uopo si osservi che si ha, come è facile verificare,

$$(8)\qquad \int_\tau \begin{vmatrix} v_{11} & \ldots & v_{1p} & u_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_{p1} & \ldots & v_{pp} & u_p \\ v_{(p+t)1} & \ldots & v_{(p+t)p} & u_{p+t} \end{vmatrix}^2 d\tau = v_{11}\, v_{22} \ldots v_{pp} \begin{vmatrix} v_{11} & \ldots & v_{1p} & v_{1(p+1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_{p1} & \ldots & v_{pp} & v_{p(p+1)} \\ v_{(p+t)1} & \ldots & v_{(p+t)p} & v_{(p+t)(p+1)} \end{vmatrix} = 0;$$

quindi [1], in virtù della continuità delle funzioni u, si avrà in tutto il campo τ:

$$(6)'\qquad \begin{vmatrix} v_{11} & \ldots & v_{1p} & u_p \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_{p1} & \ldots & v_{pp} & u_p \\ v_{(p+t)1} & \ldots & v_{(p+t)p} & u_{p+t} \end{vmatrix} = 0.$$

Facendo variare t *da* 1 *ad* $i-p$, *si hanno* $i-p$ *equazioni, che sono appunto le equazioni* (6); e quindi *le condizioni* (7) *saranno*:

$$(7)'\qquad \begin{vmatrix} v_{11} & \ldots & v_{1p} & A_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_{p1} & \ldots & v_{pp} & A_p \\ v_{(p+t)1} & \ldots & v_{(p+t)p} & A_{p+t} \end{vmatrix} = 0, \qquad (t = 1, 2, \ldots i-p).$$

[1] Dall'analisi che precede risulta indirettamente che se tutti i minori simmetrici del determinante D di ordine superiore a p si annullano, mentre uno almeno tra quelli di ordine p è diverso da zero, la caratteristica di D è p. Questa proposizione ha un valore pratico nei casi particolari; essa può dimostrarsi direttamente, valendosi di formole analoghe alle (8).

§ 2.

6. Passiamo ora a determinare il contributo che la conoscenza del moto del pianeta, supposto rigido, attorno al suo baricentro, dà sulla determinazione della densità, ossia la condizione analitica necessaria e sufficiente a cui deve soddisfare la densità del pianeta, affinchè il suo moto rigido attorno al baricentro sia quello dato.

Prendiamo per assi x, y, z, invariabilmente collegati col pianeta, gli assi principali centrali d'inerzia; adottiamo qui senz'altro le notazioni introdotte nella mia citata Nota dei Lincei; e poniamo:

$$\text{(9)} \qquad A = \int_\tau \xi^2 \varrho \, d\tau \quad , \quad B = \int_\tau \eta^2 \varrho \, d\tau \quad , \quad C = \int_\tau \zeta^2 \varrho \, d\tau \, .$$

Osserviamo che le equazioni di Eulero ci dànno le condizioni necessarie e sufficienti a cui devono soddisfare i momenti principali d'inerzia A, B, C, supposte note le componenti di rotazione del moto rigido del pianeta; e poichè esse sono lineari omogenee in A, B, C, avremo che, supposto noto il moto rigido del pianeta attorno al proprio baricentro, saranno pure noti i rapporti di A, B e C [1].

Posto:

$$A = hC \quad , \quad B = kC \, ,$$

con h, k costanti dipendenti dal moto del pianeta, supposto noto, si avrà dalle (9):

$$\text{(1)}'' \qquad \int_\tau (\xi^2 - h\zeta^2) \, \varrho \, d\tau = 0 \quad , \quad \int_\tau (\eta^2 - k\zeta^2) \, \varrho \, d\tau = 0.$$

Condizione necessaria e sufficiente affinchè il moto rigido del pianeta sia quello presupposto, è che la densità ϱ del pianeta soddisfaccia simultaneamente alle equazioni integrali (1)″, le quali sono un caso particolare del sistema (1).

Osserviamo che *il determinante* D *corrispondente al sistema* (1)″ *è certamente diverso da zero.* Infatti nel caso contrario, in virtù dei risultati del § precedente, le funzioni:

$$u_1 = \xi^2 - h\zeta^2 \quad , \quad u_2 = \eta^2 - k\zeta^2 ,$$

che non sono identicamente nulle, dovrebbero essere legate da una relazione lineare omogenea a coefficienti costanti:

$$\alpha_1(\xi^2 - h\zeta^2) + \alpha_2(\eta^2 - k\zeta^2) = 0 \, ;$$

e ciò è impossibile, se le costanti α_1, α_2 non sono tutte e due nulle.

[1] Escluso il caso in cui tutti i minori del 2° ordine, tratti dal determinante dei coefficienti di A, B, C nelle equazioni di Eulero, siano nulli; ossia escluso il caso in cui il moto rotatorio avviene, come si verifica facilmente, attorno ad un asse fisso nel pianeta con velocità costante. Questo caso, come è noto, non si presenta per la terra, e noi lo riterremo escluso dalle nostre considerazioni.

Applicando la formola (2), *avremo per l'espressione più generale della densità* ϱ *del pianeta, corrispondente al dato moto rigido,*

$$(2)'' \qquad \varrho = \pi - \frac{1}{D}\left\{ D_1 \int_\tau u_1\, \pi\, d\tau + D_2 \int_\tau u_2\, \pi\, d\tau \right\},$$

dove π è una funzione arbitraria atta all'integrazione nel campo τ, e dove D_1, D_2 sono due determinanti di 2° ordine che si ottengono immediatamente dalle posizioni fatte al § 1, n. 1.

7. Supponiamo ora che, oltre al moto rigido del pianeta attorno al suo baricentro, sia nota la sua azione esterna.

Osserviamo anzitutto che, come è stato notato nell'introduzione, in virtù della conoscenza dell'azione esterna, la densità ϱ deve soddisfare ad una certa condizione analitica. Per scriverla rammentiamo che nella mia citata Nota fu posto:

$$\Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial\zeta^2},$$

ξ, η, ζ essendo le coordinate di un punto generico di τ rispetto agli assi x, y, z; e poniamo qui:

$$\Delta'^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

x, y, z essendo le coordinate di un punto qualsiasi dello spazio. Allora si avrà dalle (1), (2) di detta Nota, in virtù del teorema di Poisson,

$$(10) \quad \varrho(x, y, z) = -\int_\varphi \Delta'^2 G_2 \,.\, \Delta^2\varrho\, d\tau + \Delta'^2 \int_\varphi \left(\frac{d\Delta^2 G_2}{dn} V - \frac{dV}{dn} \Delta^2 G_2 \right) dS\,;$$

e se si rammenta (cfr. cit. Nota, § 2) che prestabilita l'azione esterna di una massa distribuita nel campo τ, ciò che rimane di arbitrario circa alla densità $\varrho(x, y, z)$ è il suo Δ^2, avremo che, *qualunque sia la funzione che si pone nella formola* (10) *al posto di* $\Delta^2\varrho$, *la distribuzione fatta in* τ *con la densità* $\varrho(x, y, z)$, *data dalla* (10) *stessa, avrà sempre per azione esterna quella prestabilita.*

È superfluo notare che qualunque funzione $\varrho(x, y, z)$, per la quale la espressione $\Delta^2\varrho$ sia finita ed atta all'integrazione nel campo τ, può sempre esprimersi mediante la formola (10).

8. Volendo ora considerare il contributo complessivo sulla determinazione della densità del pianeta, dovuto alla conoscenza dell'azione esterna del pianeta e del suo moto rigido attorno al baricentro, dovremo esaminare dapprima se, avendo tenuto conto dell'azione esterna, la conoscenza di tale moto rigido apporta effettivamente un ulteriore contributo.

Per questo rammenteremo intanto che, come per la prima volta fu stabilito esattamente dal prof. Pizzetti [1], nota l'azione esterna di un pianeta, sono determinate le differenze fra i momenti principali d'inerzia del pianeta stesso. Allora, poichè per ipotesi è noto ancora il moto rigido del pianeta attorno al suo baricentro, facendo uso delle equazioni di Eulero, risulteranno determinati i tre momenti principali d'inerzia A, B, C.

Osserviamo che basta qui tener conto della conoscenza di uno solo dei tre momenti principali d'inerzia; infatti se per es. si suppone noto A, gli altri due B e C si potranno determinare mediante le suddette differenze, e quindi, in virtù del teorema di Pizzetti, mediante l'azione esterna del pianeta.

Ora si rammenti che, come fu dimostrato nella mia citata Nota (§ 6), condizione necessaria e sufficiente affinchè l'integrale

$$\int_\tau \varrho U d\tau$$

sia invariante rispetto a $\Delta^2\varrho$, è che la funzione U sia armonica; sicchè, essendo $\Delta^2\xi^2 = 2$, avremo che nessuno dei momenti principali d'inerzia è pienamente determinato dalla sola conoscenza dell'azione esterna del pianeta; e per conseguenza la ulteriore conoscenza dei momenti principali d'inerzia del pianeta, ossia *l'ulteriore conoscenza del moto rigido del pianeta attorno al suo baricentro deve dare un nuovo contributo sulla determinazione della densità* ϱ.

9. Per la determinazione di questo nuovo contributo basterà, come si è già osservato, tenere conto della conoscenza di uno solo dei momenti principali d'inerzia, ad es. di A, e indi fare uso dell'espressione analitica di A, che si ottiene sostituendo nella prima delle (9) al posto di ϱ il secondo membro della (10). Noi però qui ci varremo dell'espessione equivalente più semplice, che si ottiene dalla formola generale (9) della mia citata Nota, facendo $U = \xi^2$. In questo modo si avrà:

$$(11)\qquad A = \int_\tau \varrho\xi^2\, d\tau = \int_\tau (W - W_1)\,.\,\Delta^2\varrho\,.\,d\tau + \\ + \int_\varphi \left(V \frac{d\Delta^2 W_1}{dn} - \Delta^2 W_1 \frac{dV}{dn} \right) dS\,,$$

dove

$$W(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \int_\tau \frac{\xi^2}{r}\, d\tau\,,$$

e dove W_1 ha un significato che qui è superfluo richiamare; sicchè posto:

$$A_1 = A - \int_\varphi \left(V \frac{d\Delta^2 W_1}{dn} - \Delta^2 W_1 \frac{dV}{dn} \right) dS\,,$$

[1] *Intorno alle possibili distribuzioni della massa nell'interno della Terra* (Annali di matematica, tom. XVII, ser. II, pag. 233). Cfr. mia cit. Nota, §§ 4, δ).

avremo per $\Delta^2\varrho$ la seguente equazione integrale:

$$(1)''' \qquad \int_\tau (W - W_1)\, \Delta^2\varrho \, d\tau = A_1$$

con $W - W_1$ funzione nota e A_1 costante pure nota.

Osserviamo che la funzione $W - W_1$ non può essere identicamente nulla nel campo τ; perchè altrimenti (cfr. mia cit. Nota, pag. 105) si dovrebbe avere:

$$\Delta^2\xi^2 = 0,$$

che è un'uguaglianza assurda [1]. Dalla (1)''' si avrà quindi, in virtù dei risultati del § 1, che l'espressione più generale di $\Delta^2\varrho$ è data dalla formola:

$$\Delta^2\varrho = \pi + \frac{W - W_1}{\int_\tau (W - W_1)^2 \, d\tau} \left\{ A_1 - \int_\tau (W - W_1)\, \pi \, d\tau \right\}$$

con π funzione arbitraria atta all'integrazione nel campo τ.

Sostituendo questa espressione di $\Delta^2\varrho$ nella formola (10), *avremo la espressione più generale della densità $\varrho(x, y, z)$ corrispondente alla data azione esterna e al dato moto rigido del pianeta.*

Osservazione. — L'espressione, che così si ottiene, di $\varrho(x, y, z)$ contiene la funzione arbitraria π; della quale bisognerà valersi per determinare nuovi contributi, corrispondenti a nuovi eventuali dati.

S'intende che in certi casi può essere più conveniente scegliere una via diversa. Così ad es., se si suppone che, oltre all'azione esterna e al moto rigido attorno al baricentro, sia nota nei punti della superficie S del pianeta, la densità e la sua derivata normale sarà più semplice valersi delle formole contenute nei §§ 7, 8 e 9 della mia citata Nota, ed operare sul $\Delta^6\varrho$, come si è operato sul $\Delta^2\varrho$ nei nn. 8 e 9 della presenta Nota.

Meccanica. — *Sulla risoluzione delle equazioni integro-differenziali dell'equilibrio dei corpi elastici isotropi per dati spostamenti in superficie.* Nota del Corrisp. G. Lauricella.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

[1] Di qui risulta nuovamente che l'ulteriore conoscenza del moto rigido del pianeta attorno al suo baricentro deve dare un nuovo contributo sulla determinazione della densità.