ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXI.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1912

Per n dispari uno di questi periodi è dato sempre dalla

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{CL}{2}}.$$

È facile determinare le condizioni di eccitazione che danno origine alle due onde nel caso dell'oscillatore a stella, o quelle che determinano il periodo singolare (per n dispari) nel caso dell'oscillatore a catena.

4. Per $n = 2$ l'oscillatore a stella e l'oscillatore a catena coincidono. Ho studiato sperimentalmente questo caso più semplice, e dei risultati delle esperienze mi riservo di scrivere altrove; essi sono in pieno accordo con la teoria, e lasciano appunto sperare l'applicabilità pratica del sistema che si propone.

Matematica. — *Sopra alcune questioni riguardanti due fasci di curve dati in una superficie algebrica.* Nota del prof. M. PANNELLI, presentata dal Corrisp. G. CASTELNUOVO.

Questa breve Nota ha per oggetto lo studio dei caratteri della curva, luogo dei punti di contatto fra le curve di due fasci, dati in una superficie algebrica, e il numero delle curve dei fasci medesimi, che fra loro si osculano, oppure hanno un doppio contatto [1].

1. La superficie F sulla quale sono dati i due fasci di curve (C) e (C′), si supporrà affatto priva di singolarità, il che, come è noto, non impone ad essa alcuna restrizione, purchè si imagini immersa in uno spazio ad un numero di dimensioni eguale o superiore a cinque. Si indicherà con n l'ordine e con p il genere di una curva C del fascio (C), al quale si attribuirà un numero σ di punti-base, ciascuno multiplo ordinario secondo i per ogni curva del fascio stesso e a tangenti variabili con la curva. I simboli n', p', n', i' avranno significati analoghi rispetto all'altro fascio (C′). Inoltre, si farà l'ipotesi che i due fasci (C) e (C′) non abbiano punti-base comuni, e si rappresenterà con m il numero dei punti in cui si tagliano due curve

(1) Questi problemi sono stati sin qui risoluti in modo completo soltanto per il piano. Si consultino in proposito le due seguenti Note, entrambe inserite nel vol XXXI dell'Accad. della Scienze di Torino: Segre, *Intorno ad un carattere delle superficie* ecc.; Berzolari, *Sulle curve piane che in due dati fasci hanno un semplice o un doppio contatto, oppure si osculano.* Per più ampie notizie storiche sull'argomento veggasi l'articolo del Berzolari stesso: *Allgemeine Theorie der höheren ebenen algebraischen Curven,* § 38, pubblicato nella Rivista: Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Band III, Theil II.

generiche C e C′, essendo $m \geq 2$. Infine, si chiamerà T la curva luogo dei punti di contatto fra le curve dei due fasci dati.

I due fasci (C) e (C′) determinano il sistema lineare di curve $|C + C'|$. In virtù di un teorema di Enriques [1], le Jacobiane $(C + C')_j$ di tutte le reti contenute in questo sistema, appartengono ad un medesimo sistema lineare $|(C + C')_j|$. Fra le reti anzidette ve ne sono infinite, ciascuna delle quali viene individuata da due fasci $C_0(C')$ e $C'_0(C)$, formati l'uno dalle curve composte da una curva fissa (ma arbitraria) C_0 di (C) e dalle curve di (C′), e l'altro da quelle composte da una curva fissa (anche essa arbitraria) C'_0 di (C′) e dalle curve di (C), i quali fasci hanno in comune la curva composta da C_0 e C'_0. Ora si consideri una qualunque di siffatte reti. Per ogni punto M di C_0 (o di C'_0) passa una curva ed una sola del fascio (C′), o (C); e questa curva insieme con C_0, (o C'_0), costituisce una curva (composta) della rete considerata, la quale possiede in M un punto doppio. Ciò dimostra intanto che le due curve C_0 e C'_0 fanno parte della Jacobiana della rete medesima. Sia poi P un punto qualunque della curva, che completa questa Jacobiana. Tutte le curve della rete, che passano per P, sono ivi tangenti fra loro. Fra queste curve ve n'ha una, C'_1, che appartiene al fascio C_0 (C′), ed una, C_1, che appartiene al fascio $C'_0(C)$; queste due curve C'_1 e C_1 si toccano dunque nel punto P, il quale per conseguenza giace sulla curva T. La Jacobiana della rete particolare presa in considerazione, si compone pertanto delle tre curve T, C_0 e C'_0. Facendo variare le curve C_0 e C'_0 nei due fasci (C) e (C′), varia questa rete; ma la curva T fa sempre parte della sua Jacobiana. Dunque:

I. « Le Jacobiane $(C + C')_j$ e le curve composte $T + C + C'$ appar- « tengono ad un medesimo sistema lineare: al sistema Jacobiano determi- « nato dal sistema $|C + C'|$ ».

Questo teorema, che può essere espresso mediante la seguente eguaglianza simbolica:

$$|(C + C')_j| = |T + C + C'|$$

permette di dedurre facilmente le proprietà della curva T da quelle note della Jacobiana $(C + C')_j$.

Innanzi tutto esso mostra che l'ordine di questa Jacobiana è uguale alla somma degli ordini delle tre curve T, C e C′. Quindi poichè l'ordine della Jacobiana medesima è [2]:

$$3(n + n') - 3\mu + \nu$$

(1) Enriques, *Intorno ai fondamenti della geometria sopra le superficie algebriche*, n. 13. Atti dell'Accad. delle Scienze di Torino, vol. XXXVII.

(2) Pannelli, *Sopra un carattere di una varietà algebrica a tre dimensioni*, § 3, n. 4, nota 11, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, tomo XXXII, 1911.

dove μ indica l'ordine della superficie F e ν la sua prima classe, e gli ordini delle curve C e C' sono n ed n', si trova:

II. « La curva T è dell'ordine:

$$2(n + n') - 3\mu + \nu .$$

Inoltre, il grado di moltiplicità per la Jacobiana $(C + C')_j$ di un punto-base del fascio (C), o (C'), è eguale alla somma dei gradi di moltiplicità dello stesso punto per le tre curve T, C e C'. Quindi poichè il primo di questi gradi è $3i - 1$, oppure $3i' - 1$, e quelli relativi alle curve C e C' sono anche noti, si ha (1).

III. « La curva T possiede ciascun punto-base del fascio (C), o (C'), « come punto multiplo secondo $2i - 1$, o $2i' - 1$ ».

Infine, indicando con il simbolo gA il genere di una curva A tracciata sulla superficie F, lo stesso teorema I somministra la eguaglianza:

$$g(C + C')_j = g(T + C + C') .$$

Ora è noto (2) che il genere Π della Jacobiana di una rete (Γ) di curve Γ, del genere P, con Σ punti-base, data sopra una superficie F, è legato all'invariante Ω di Castelnuovo-Enriques, che si riferisce alla superficie medesima, dalla relazione:

$$\Omega = \Pi - 9P + \Sigma + 9 . \qquad (1)$$

Nel caso attuale è:

$$(\Gamma) = (C + C') \qquad \Sigma = \sigma + \sigma' .$$

Quindi si ha intanto:

$$g(C + C')_j = \Omega + 9g(C + C') - (\sigma + \sigma') - 9 .$$

D'altra parte, ricordando la formula con cui si calcola il genere di una curva composta, si trova:

$$g(T + C + C') = gT + g(C + C') + (TC) + (TC') - 1 ,$$

dove i simboli (TC) e (TC') indicano i numeri dei punti d'incontro della

(1) Cfr. Segre, loc. cit., n. 3.

(2) Severi, *Il genere aritmetico e il genere lineare* ecc., n. 7, Atti dell'Accad. delle Scienze di Torino, vol. XXXVII (1902).

curva T con le curve C e C', situati fuori dei punti base. Dalle eguaglianze precedenti segue l'altra:

$$gT = \Omega + 8g(C + C') - (TC) - (TC') - (\sigma + \sigma') - 8.$$

Qui, rammentando che i generi delle due curve C e C' sono stati chiamati p e p', e che le curve medesime s'incontrano in m punti variabili si ha:

$$g(C + C') = p + p' + m - 1.$$

Inoltre, il fascio (C') sega sopra una curva generica C una serie lineare di ordine m, la quale possiede $2(m + p - 1)$ punti doppî; tanti sono dunque i punti di incontro (variabili) della curva T con C [1]; epperò si ha ancora:

$$(TC) = 2(m + p - 1)$$

e analogamente:

$$(TC') = 2(m + p' - 1).$$

Infine, ponendo i valori di $g(C + C')$, (TC) e (TC') dati dalle formule precedenti, in quella che somministra il genere della curva T, e indicando questo genere con π, si conclude:

IV. « La curva T è del genere:

$$\pi = \Omega + 4m + 6(p + p') - (\sigma + \sigma') - 12. \tag{2}$$

2. Determinato in tal modo il genere π della curva T, si calcola facilmente prima il numero τ delle curve dei due fasci (C) e (C'), che fra loro si osculano, e poi quello d delle curve, che hanno un doppio contatto, valendosi delle relazioni, che legano questi due numeri a quel genere, relazioni dovute al Segre, e dal Segre stesso applicate per risolvere i medesimi problemi nel caso in cui la superficie F sia un piano [2].

La prima delle due anzidette relazioni è questa:

$$\tau - 2\pi = 4m - (\sigma + \sigma') - I - 6$$

nella quale I indica l'invariante di Zeuthen-Segre della superficie F. Ponendo in essa in luogo di π il suo valore dato dalla formula (2), si ottiene:

I. « Il numero delle curve dei due fasci (C) e (C'), che fra loro si osculano, è:

$$\tau = 2\Omega - I + 12(m + p + p') - 3(\sigma + \sigma') - 30.$$

[1] Segre, loc. cit., n. 2.
[2] Segre, loc. cit., n. 6.

La seconda relazione è la seguente:

$$d + \tau + \pi = (2m + 2p - 3)(2m + 2p' - 3)$$

dalla quale si deduce subito:

II. « Il numero delle curve dei due fasci (C) e (C'), che hanno fra « loro un doppio contatto, è;

$$d = \mathrm{I} - 3\Omega + 4[m(m + p + p') + pp' - 6(p + p') - 7m + \sigma + \sigma'] + 51.$$

Dalle formule precedenti si ricavano quelle che si riferiscono al caso in cui due fasci giacciono in un piano, ricordando che per questa superficie particolare si ha: $\Omega = 10$, $\mathrm{I} = -1$.

3. Sin qui si è supposto che i due fasci (C) e (C') non avessero alcun punto-base comune. Ora si tolga questa restrizione: ma si continui a chiamare σ e σ' i numeri dei punti base non comuni, e si dica poi s quello dei punti-base comuni; m indichi ancora il numero dei punti (variabili) comuni a due curve generiche C e C'. In questa ipotesi, ogni rete contenuta nel sistema $|C + C'|$ possiede $\sigma + \sigma' + s$ punti-base, e quindi in virtù della relazione (1), il genere π della curva T è dato dalla formula, che si deduce dalla (2), mettendo in essa $\sigma + \sigma' + s$ al posto di $\sigma + \sigma'$. In tal modo e ricordando che Ω è un invariante (relativo) della superficie F, si conclude:

« L'espressione:

$$\Omega = \pi - 4m - 6(p + p') + (\sigma + \sigma' + s) + 12 \tag{3}$$

« formata con i caratteri di due fasci di curve dati ad arbitrio sopra una « superficie algebrica, non dipende dalla scelta dei fasci medesimi ».

L'invariantività di questa espressione può essere dimostrata *direttamente*, con un metodo affatto analogo a quello seguìto da Enriques [1] per stabilire l'invariantività del carattere Ω.

Se poi i due fasci (C) e (C') si prendono in una medesima rete, e si osserva che in questo caso la curva T si spezza nella Jacobiana della rete e nella curva, che i due fasci hanno in comune, la espressione (3) si riduce alla (1), e allora l'invariantività di questa ultima espressione è una conseguenza di quella della prima.

Si noti infine che la espressione (3) può servire a calcolare l'invariante Ω, relativo ad una data superficie F, quando si scelgano i due fasci di curve (C) e (C') in modo, che sia possibile calcolare direttamente il genere π della curva T da essi determinata. Ecco due esempî:

[1] Enriques, *Introduzione alla geometria sulle superficie algebriche*, n. 41, Memorie della Società italiana delle Scienze, ser. III, tomo X, 1896.

1°. La superficie F sia un piano. Come fasci (C) e (C′) si prendano un fascio di rette, avente per centro un punto O, e un fascio di coniche avente per base quattro punti, distinti da O. Si ha intanto:

$$m=2 \quad , \quad p=p'=0 \quad , \quad \sigma=1 \quad , \quad \sigma'=4 \quad . \quad s=0 .$$

Inoltre in questo caso, T è la curva generata dal dato fascio di coniche e dal fascio ad esso proiettivo formato dalle rette polari, rispetto a queste coniche, del centro O, e quindi è una curva del terzo ordine del genere $\pi=1$. Così si ritrova: $\Omega=10$.

2°. La superficie F sia una superficie generale di ordine n dello spazio ordinario. Come fasci (C) e (C′) si prendano quelli formati dalle curve, che si ottengono segando la superficie con due fasci di piani, aventi per assi due rette sghembe R ed R′. Si ha intanto:

$$m=n \quad , \quad p=p'=\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) \quad , \quad \sigma=\sigma'=n \quad , \quad s=0 .$$

Inoltre, come è facile riconoscere, la curva T è in questo caso il luogo dei punti di contatto delle tangenti alla superficie F, che si appoggiano alle due rette R ed R′, e quindi è l'intersezione di F con la superficie H, di ordine n, generata dal fascio di piani (R), o (R′), con il fascio (F′) formato dalle prime polari F′, rispetto ad F, dei punti della retta R′ od R, i due fasci resi proiettivi, facendo corrispondere ad un piano del fascio (R), o (R′), la polare F′ del punto in cui il piano medesimo incontra la retta R′ od R. Perciò la curva è del genere $\pi=n^3-2n^2+1$. Così si ritrova:

$$\Omega=n(n-4)^2+1 .$$

Meccanica celeste. — *Sulle orbite periodiche*. Nota I^a^ di Leonida Tonelli, presentata dal Socio S. Pincherle.

Si vogliono dare qui dei criterî atti a far riconoscere l'esistenza di orbite periodiche, per punti materiali liberi, sollecitati, da forze conservative, a muoversi in piano. È nota l'importanza di tale questione; ed è anche noto che l'unico criterio — veramente pratico — che si conosca è quello dato da E. T. Whittaker [1]. Se non che, tale criterio ha il grave torto di essere stabilito per via tutt'altro che rigorosa. Esso consiste in ciò: se su due curve chiuse L_1, L_2, tali che la prima sia tutta circondata dalla seconda, una certa espressione $T\left(=2\frac{U+h}{\varrho}-\frac{\partial U}{\partial n}\right.$, in cui entrano, in modo molto semplice, la curvatura della linea, la componente della forza

[1] *On Periodic Orbits* (Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, volume LXII, n. 3, 1902).