ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1912

Economia matematica. — *Contributo alla teoria matematica della dinamica economica.* Nota I[a] del dott. L. Amoroso, presentata dal Corrisp. M. Pantaleoni.

L'Economia matematica, nata con Cournot, e sviluppatasi con Jevons, Walras, Edgeworth, Fisher, è venuta in questi ultimi anni, mercè la grande opera di Vilfredo Pareto (¹), ad acquistare i caratteri di scienza autonoma, che abbraccia, contemplandoli da un punto di vista teorico e generale, una classe molto estesa di fenomeni naturali, che comprensivamente vanno sotto il nome di fenomeni economici. La scienza, che così si è venuta a formare, deve essere considerata come una scienza matematica sul tipo della Geometria analitica e della Meccanica razionale. Come diceva anni or sono il senatore prof. Volterra in un discorso inaugurale (²), Descartes e Lagrange non esiterebbero a darle il titolo di Economia analitica.

Come la Meccanica razionale, l'Economia matematica comprende due parti: una parte statica, ed una parte dinamica. La formulazione matematica dei principii fondamentali della statica economica è stabilita esaurientemente nell'opera di Vilfredo Pareto. La dinamica economica è molto più arretrata. Il progresso dell'Economia matematica dipenderà, a nostro avviso, da una felice formulazione analitica dei principî fondamentali che regolano il movimento dei parametri, atti ad individuare la configurazione dei sistemi economici.

In due modi si possono concepire i fenomeni del moto. Come fenomeni di equilibrî successivi: si parte da una data configurazione di equilibrio A_0: variando le condizioni che determinano l'equilibrio (forze e vincoli) si passa dalla configurazione A_0 ad una nuova configurazione di equilibrio A_1; le condizioni che individuano l'equilibrio variano ancora, e si passa dalla configurazione A_1 alla configurazione A_2; e così via. In questo modo di concepire le cose si suppone che le variazioni delle condizioni, che individuano l'equilibrio (forze e vincoli), avvengano con discontinuità, e che fra due variazioni consecutive passi tanto tempo, quanto è necessario perchè il sistema economico assuma la nuova configurazione, che corrisponde alle condizioni

(¹) Cfr. Pareto, *Manuale di economia politica*, Milano, 1906, *Appendice matematica*; *Manuel d'économie politique*, Paris, 1909, *Appendix mathématique* e soprattutto l'articolo *Économie mathématique* nella Encyclopédie des sciences mathématiques, t. I, vol. IV, pp. 591 e segg.

(²) Volterra, *Sui tentativi di applicazione della matematica alle scienze biologiche e sociali*. R. Università di Roma, Annuario per l'anno scolastico 1901-02.

trasformate. In sostanza si viene in tal modo a trascurare i fenomeni dell'inerzia, e le leggi della dinamica si ottengono applicando successivamente le leggi della statica.

Come in Meccanica, così in Economia tale concezione non corrisponde che molto imperfettamente a quello che succede nella realtà, in cui in generale avvengono in ogni istante variazioni delle *condizioni* dell'equilibrio, prima che il sistema abbia effettivamente raggiunto la posizione di equilibrio corrispondente alle condizioni esistenti nell'istante precedente.

Ci si può porre invece da un punto di vista del tutto differente, che diremo *infinitesimale*, e che è quello della ordinaria dinamica analitica. In ogni istante di moto, la configurazione, che un dato sistema economico assume, è identica alla configurazione di equilibrio che lo stesso sistema assumerebbe, sotto l'azione delle stesse forze applicate e degli stessi vincoli, purchè si aggiungano alle forze direttamente applicate altre forze, che misurano la resistenza che la materia oppone al moto, e che si dicono le *forze d'inerzia del sistema*.

È da questo secondo punto di vista più generale che ci poniamo in questa Nota, per studiare i fenomeni del moto economico.

2. Consideriamo un individuo in presenza di n beni economici $X_1, X_2, \dots, X_n$. Consideriamo in uno spazio ad n dimensioni un sistema cartesiano ortogonale e portiamo su ciascun asse le quantità di ciascun bene X_i. Tali quantità le indicheremo indifferentemente con le lettere x_i ovvero ξ_i.

Se un individuo possiede la quantità ξ_1 del bene X_1, la quantità ξ_2 del bene X_2, ecc., la quantità ξ_n del bene X_n, diremo che esso sta nel punto materiale A di coordinate $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ ovvero costituisce il punto economico A.

Si dimostra che è sempre possibile determinare *sperimentalmente* una funzione

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n), \tag{1}$$

che si dice *funzione indice dell'ofelimità* tale che delle due combinazioni

$$x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$$

ed

$$x_1^{(1)}, x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}$$

l'individuo che si considera preferisce quella che corrisponde a valore più grande di φ.

Se la (1) è una funzione indice dell'ofelimità ogni funzione $F(\varphi)$, qualunque sia F, purchè continua e tale che la derivata $\frac{dF}{d\varphi}$ risulti sempre positiva, è ancora una funzione indice dell'ofelimità.

Le varietà ad $n-1$ dimensioni che si ottengono uguagliando ad una costante la funzione (1)

(2) $$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{cost}$$

costituiscono per l'individuo che si considera delle *varietà di indifferenza*, nel senso che tutte le combinazioni $x_1, x_2, \dots, x_n$ che corrispondono a punti diversi di una stessa delle varietà (2), recano all'individuo che si considera lo stesso piacere.

Le quantità $x_1, x_2, \dots, x_n$ possono indicare quantità consumate o più in generale quantità possedute. Nella scienza economica hanno interesse soprattutto le azioni ripetute, onde x_1 rappresenta per es. la quantità di farina che l'individuo considerato consuma ogni giorno, x_2 la superficie del campo di cui egli gode giornalmente, ecc. [1].

L'individuo che è in A o come diremo ora ed in seguito il punto economico A è sollecitato a muoversi dai suoi gusti, che possiamo rappresentare come una forza di cui le componenti secondo gli assi coordinati sono proporzionali alle derivate di una qualsiasi funzione indice dell'ofelimità, e quindi proporzionali a

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}.$$

Ma A non sarà libero di muoversi a suo piacimento: dovrà invece esser soggetto a certi vincoli. Per considerare il caso più semplice dello scambio, il movimento dovrà avvenire in modo che in ogni istante il valore delle merci vendute sia pari al valore delle merci comprate, e quindi si abbia, se la merce X_n è la moneta e $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$ sono i prezzi delle merci $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}$:

$$\sum_i^{1\dots n-1} p_i(x_i - \xi_i) + (x_n - \xi_n) = 0$$

ovvero posto $p_n = 1$

(3) $$\sum_i^{1\dots n} p_i(x_i - \xi_i) = 0.$$

Il punto economico A_1 è quindi vincolato a rimanere sulla varietà (3).

Le equazioni dell'equilibrio si ottengono scrivendo che i movimenti comparabili con le forze sono impediti dagli ostacoli: quindi detto λ un

[1] Cfr. l'articolo citato di V. Pareto nell'*Encyclopédie des sciences mathématiques*, pag. 604.

moltiplicatore di Lagrange, esse sono:

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i} = \lambda p_i & i = 1, 2, \dots n. \\ \sum_i^{1\dots n} p_i(x_i - \xi_i) = 0. \end{cases}$$

Il sistema (4), detto di Jevons-Walras è costituito da $n+1$ equazioni, che sono sufficienti in generale a determinare le $n+1$ incognite, e cioè il parametro λ e le coordinate $x_1, x_2, \dots, x_n$ corrispondenti alla configurazione di equilibrio. Esse esprimono che le coordinate corrispondenti alla posizione di equilibrio rappresentano un certo punto dell' iperpiano (3), in cui l' iperpiano stesso è tangente alla varietà di indifferenza $\varphi =$ cost.

In generale, se vi sono ϱ vincoli, rappresentati dalle equazioni:

$$(5)\qquad \psi_k(X_1 \dots X_n) = 0, \qquad k = 1, 2, \dots \varrho$$

le equazioni che individuano la configurazione di equilibrio saranno

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i} = \sum_k^{1\dots\varrho} \lambda_k \dfrac{\partial\psi_k}{\partial x_i} & i = 1, 2 \dots n \\ \psi_j = 0 & j = 1, 2, \dots \varrho \end{cases}$$

e nella posizione di equilibrio, le varietà (5) a $n - \varrho$ dimensioni risultano tangenti ad una varietà di indifferenza $\varphi =$ cost.

Consideriamo il caso, in cui le equazioni rappresentanti i vincoli, sieno in numero di $n - 1$:

$$(8)\qquad \psi_k = 0 \qquad k = 1, 2, \dots n - 1.$$

In tal caso le equazioni (8) rappresentano la traiettoria descritta dal punto A. Il punto di arresto su tale traiettoria, si otterrà, considerando le equazioni

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = \sum_k^{1\dots n-1} \lambda_k \frac{\partial\psi_k}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots n$$

ed eliminando per mezzo delle (8) i parametri $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$. Si otterrà così l'equazione

$$(9)\qquad \frac{d(\psi_1, \psi_2, \dots \psi_{n-1}, \varphi)}{d(x_1, x_2, \dots x_{n-1}, x_n)} = 0,$$

che associata alla (8) definisce le coordinate del punto di equilibrio.

Osserviamo in generale che la determinazione della configurazione di equilibrio è indipendente dalla ipotesi della misurabilità del piacere. Tale ipotesi fu discussa lungamente da Jevons, ma è estranea alla teoria dell'equilibrio economico: per determinare la configurazione di equilibrio, basta una funzione che cresce quando il piacere cresce, decresce quando il piacere decresce, cioè una funzione indice dell'ofelimità.

Vedremo che l'ipotesi della misurabilità del piacere è invece necessaria, allorquando si vuol passare dalla statica alla dinamica economica. Analogamente per determinare il moto di un sistema materiale occorre avere la misura delle forze applicate: per determinare la configurazione di equilibrio, basta invece una funzione *indice delle forze.*

3. L'individuo che è inizialmente nel punto A di coordinate $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$, occupa nella configurazione di equilibrio la posizione del punto B, le cui coordinate $x_1, x_2, \ldots x_n$, si ottengono risolvendo il sistema (6).

Quale è la legge del moto, quale cioè la traiettoria per passare da A a B, e quale la velocità in ogni istante?

Per risolvere il problema in generale, occorre cominciare a considerare le cose in un caso particolare.

Riprendiamo perciò il caso in cui le equazioni ai vincoli, siano le (8) in numero di $n - 1$, e supponiamo che, partendo da una posizione iniziale A, e, percorrendo la curva (8) in un determinato verso, si giunga ad un punto B, le cui coordinate si verificano simultaneamente alle equazioni (8) e (9).

Nel punto la B curva (8) sarà allora tangente ad una varietà di indifferenza

$$\varphi = \text{cost.} \tag{10}$$

Supponiamo che la curva (8) sia tale che a partire dal punto B per un tratto finito BC essa giaccia sulla varietà (10): cioè che l'equazione (9) che per ipotesi è verificata quando per $x_1, x_2 \ldots x_n$ si pongono le coordinate del punto B, sia verificata ancora, quando per $x_1, x_2, \ldots x_n$ si pongono le coordinate di un punto qualsiasi del tratto BC della curva (8). Il problema che si impone, è allora il seguente: Che cosa farà, giunto in B, l'individuo che consideriamo: si arresterà in B o seguiterà a muoversi lungo la BC? E se succede questo secondo caso, conserverà la stessa velocità che aveva in B, o la velocità andrà diminuendo, ma conservando sempre lo stesso verso, ovvero infine il punto economico oscillerà intorno ad un punto dell'intervallo BC?

Più in generale, se un punto economico è obbligato a mantenersi sopra una varietà di indifferenza quali saranno le leggi del moto? E cioè quale sarà la traiettoria e quali le componenti della velocità in ogni istante?

Il problema corrispondente in Meccanica è quello del moto di un punto materiale obbligato a mantenersi sopra una superficie di livello, e cioè sopra una superficie, ortogonale alle forze da cui il punto è sollecitato. Se il punto non è sollecitato che dal proprio peso, si tratta allora del moto in un piano orizzontale. Le leggi del moto sono determinate in questo caso dal principio di inerzia di Galileo, che afferma che il punto economico conserva in ogni istante in valore e direzione la velocità che aveva all'istante iniziale.

Affermare che un punto economico obbligato a mantenersi sopra una varietà di indifferenza e dotato di una certa velocità iniziale, si muove sulla varietà stessa, è affermare che esiste qualche cosa nelle azioni economiche, che corrisponde *almeno in parte* a quello che è l'inerzia in meccanica. Solo l'esperienza può decidere se questa ipotesi si verifica nella realtà: una volta decisa la questione, si può, senza ricorrere ulteriormente all'esperienza, scrivere le equazioni generali del moto economico.

In ogni punto di una stessa varietà di indifferenza un punto economico prova lo stesso piacere; sembra quindi naturale ammettere che, se esiste nel complesso economico qualche cosa, che corrisponde all'inerzia in Meccanica, ciò dipenderà essenzialmente dalla natura del punto economico considerato e dalla sua velocità iniziale, non già dalla posizione iniziale. Tale ipotesi si traduce analiticamente nel seguente:

Postulato fondamentale. — *Se un punto economico libero si muove sopra una varietà di indifferenza, il moto avviene in modo che la velocità in ogni istante dipende oltre che dal tempo, dalla velocità iniziale e non già dalla posizione iniziale del punto stesso. Dette* $x_1, x_2, \dots x_n$ *le coordinate, che individuano la posizione di* B *in un istante generico;* $x'_1, x'_2, \dots x'_n$, *le componenti della velocità:* $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ e $\xi'_1, \xi'_2, \dots \xi'_n$ *le stesse quantità corrispondenti alla posizione iniziale si ha*

$$x'_i = \Psi_i(t|x_1, x_2, \dots x_n|\xi'_1, \xi'_2, \dots \xi'_n) \qquad i = 1, 2, \dots n \tag{10}$$

In particolare se è identicamente

$$\psi_i \equiv 0 \qquad i = 1, 2, \dots n$$

si ha ancora:

$$x'_i = 0 \qquad i = 1, 2, \dots n$$

Ciò corrisponderebbe ad ammettere che non esista nel complesso economico, qualche cosa che corrisponda all'inerzia in Meccanica.

Supponiamo invece che le ψ_i non sieno identicamente nulle. Deriviamo le (10) rispetto al tempo; per mezzo delle equazioni così ottenute, eliminiamo $\xi'_1, \dots \xi'_n$, si otterrà allora:

$$mx''_i - \Phi(t|x_1, x_n|x'_1, \dots x'_n) = 0 \qquad i = 1, 2, \dots n. \tag{11}$$

Sono queste le equazioni differenziali del moto di un punto libero sopra una varietà di indifferenza. L'ipotesi enunciata nel postulato precedente, equivale dunque a questo, che le equazioni differenziali della dinamica economica sieno del secondo ordine.

In una prossima Nota ci proponiamo di mostrare come sia possibile impostare l'esperienza per determinare la forma delle funzioni ψ_i ovvero delle Φ_i, ed inoltre dedurre dai principii stabiliti le equazioni generali della dinamica di un punto economico (*homo oeconomicus*).

Fisica. — *Sulla misura statica dell'attrito interno dei gaz.* Nota di G. Guglielmo, presentata dal Socio P. Blaserna

L'attrito interno dei gaz è stato determinato da parecchi fisici, sempre con metodi dinamici o indiretti, cioè deducendolo dallo smorzamento che esso produce sopra un disco sospeso orizzontalmente ad un filo elastico ed oscillante nel suo piano ed attorno al suo asse, oppure deducendolo dalla quantità di gaz che effluisce da un tubo capillare in condizioni note.

Il fatto che fisici autorevoli come Maxwell, O. Meyer, che tanto s'è occupato della teoria dei gaz, ed altri hanno prescelto questi metodi prova che essi sono i più adatti per la misura di questo attrito, però quando si voglia solamente mostrare la sua esistenza e la sua natura, e quindi non si richieda necessariamente la sua misura esatta, questi metodi non sono punto adatti, perchè non solo le esperienze relative non mostrano in modo semplice la natura dell'attrito, ma inoltre per ricavare da esse il suo valore si richiede un calcolo piuttosto lungo e relativamente difficile, tantochè è omesso, sia nei trattati di Fisica più estesi, sia nei trattati che si occupano specialmente della teoria dei gaz; quindi sarebbe certo impossibile esporre questo calcolo, anche sommariamente, nelle lezioni orali per quanto estese, e perciò questo argomento così importante della teoria dei gaz viene esposto in modo incompleto e quindi non scevro da oscurità.

Ho cercato perciò di determinare questo attrito seguendo nelle esperienze la definizione teorica solita che si riferisce alle condizioni più semplici.

Se si hanno due lamine piane, parallele, estese all'infinito e distanti δ fra le quali si trovi un gaz, e se una delle lamine è immobile e l'altra si muova nel suo piano con velocità v costante, il gaz interposto si metterà in moto e prenderà una velocità, diversa nei diversi strati di spessore infinitesimo paralleli alle lamine, proporzionale alla distanza dalla lamina immobile ed uguale a v nello strato adiacente alla lamina in moto. L'attrito consiste in una pressione tangenziale che il gaz dotato di tale moto speciale esercita sulla lamina in quiete nella direzione del moto e sulla lamina in moto in senso opposto (1).

(1) Il calcolo di questa pressione secondo la teoria cinetica dei gaz (importante