ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1912

Cristallografia. — *La legge di Hauy nei cristalli solidi, fluenti e liquidi.* Nota del Corrisp. C. VIOLA.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sulla teoria della gravitazione.* Nota di MAX ABRAHAM, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Alle dieci componenti del tensore gravitazionale assegniamo i valori seguenti:

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} & X_x = \frac{1}{4\pi\gamma}\left\{-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\psi\right\},\ Y_y = \frac{1}{4\pi\gamma}\left\{-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2+\psi\right\}, \\ & \qquad\qquad Z_z = \frac{1}{4\pi\gamma}\left\{-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2+\psi\right\}, \\ & X_y = Y_x = -\frac{1}{4\pi\gamma}\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial y},\ Y_z = Z_y = -\frac{1}{4\pi\gamma}\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial\Phi}{\partial z}, \\ & \qquad\qquad Z_x = X_z = -\frac{1}{4\pi\gamma}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial\Phi}{\partial x}; \end{aligned}\right.$$

$$(10a)\quad \begin{aligned} & X_u = U_x = -\frac{1}{4\pi\gamma}\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial\Phi}{\partial x},\ Y_u = U_y = -\frac{1}{4\pi\gamma}\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial\Phi}{\partial y}, \\ & \qquad\qquad Z_u = U_z = -\frac{1}{4\pi\gamma}\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial\Phi}{\partial z}; \end{aligned}$$

$$(10b)\quad U_u = \frac{1}{4\pi\gamma}\left\{-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right)^2+\psi\right\}.$$

Essendo Φ e

$$(10c)\quad \psi = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right)^2\right\}$$

scalari quattrodimensionali, le dieci componenti (10), (10*a*), (10*b*) si trasformano come i quadrati e prodotti delle coordinate x, y, z, u, cioè come componenti di un tensore quattrodimensionale. Da esse derivano le componenti della *forza motrice* relativa all'unità di volume:

$$
(11)\quad \begin{cases}
\nu F_x = \dfrac{\partial X_x}{\partial x} + \dfrac{\partial X_y}{\partial y} + \dfrac{\partial X_z}{\partial z} + \dfrac{\partial X_u}{\partial u}, \\[2ex]
\nu F_y = \dfrac{\partial Y_x}{\partial x} + \dfrac{\partial Y_y}{\partial y} + \dfrac{\partial Y_z}{\partial z} + \dfrac{\partial Y_u}{\partial u}, \\[2ex]
\nu F_z = \dfrac{\partial Z_x}{\partial x} + \dfrac{\partial Z_y}{\partial y} + \dfrac{\partial Z_z}{\partial z} + \dfrac{\partial Z_u}{\partial u}, \\[2ex]
\nu F_u = \dfrac{\partial U_x}{\partial x} + \dfrac{\partial U_y}{\partial y} + \dfrac{\partial U_z}{\partial z} + \dfrac{\partial U_u}{\partial u}.
\end{cases}
$$

Introducendo le espressioni delle dieci componenti del tensore gravitazionale, e tenendo conto della (1), si giunge all'espressione della forza motrice:

$$
(12)\qquad \nu F = -\nu \operatorname{Grad} \Phi
$$

identica alla (2).

Interpretiamo le espressioni assegnate alle componenti del tensore gravitazionale. Le sei prime componenti (10) del tensore dànno le « *tensioni fittizie* »; nel campo di gravità stazionario; le *tensioni normali* sono:

$$
(12a)\quad \begin{cases}
X_x = \dfrac{1}{8\pi\gamma}\left\{ -\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2 \right\}, \\[2ex]
Y_y = \dfrac{1}{8\pi\gamma}\left\{ \left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2 \right\}, \\[2ex]
Z_z = \dfrac{1}{8\pi\gamma}\left\{ \left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2 \right\},
\end{cases}
$$

e le *tensioni tangenziali*

$$
(12a)\quad X_y = Y_x = -\frac{1}{4\pi\gamma}\frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad Y_z = Z_y = -\frac{1}{4\pi\gamma}\frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial \Phi}{\partial z},
$$

$$
Z_x = X_z = -\frac{1}{4\pi\gamma}\frac{\partial \Phi}{\partial z}\frac{\partial \Phi}{\partial x}.
$$

Esse corrispondono ad una *pressione lungo le linee di forza*, ed a *trazioni normali a queste linee*, entrambe *proporzionali al quadrato della forza motrice* F, e, *per un campo stazionario, eguali alla densità dell'energia* (v. 13). Per un campo variabile col tempo bisogna sottrarre dalle tensioni normali (12*a*) la pressione idrostatica:

$$
(12c)\qquad p = \frac{1}{8\pi\gamma}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial l}\right)^2.
$$

La *densità dell'energia* è data da:

$$\varepsilon = U_u = \frac{1}{8\pi\gamma}\left\{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial l}\right)^2\right\}. \tag{13}$$

Essa risulta *essenzialmente positiva e, per campi stazionari, proporzionale al quadrato della forza motrice* F.

La *corrente di energia* ha le componenti (¹):

$$S_x = i\,c\,U_x \quad , \quad S_y = i\,c\,U_y \quad , \quad S_z = i\,c\,U_z\,,$$

di modo che si ottiene dalle (10*a*)

$$S = -\frac{1}{4\pi\gamma}\frac{\partial \Phi}{\partial t}\,\mathrm{Grad}\,\Phi = \frac{1}{4\pi\gamma}\frac{\partial \Phi}{\partial t}\,F\,, \tag{14}$$

vale a dire: *La corrente dell'energia ha la direzione della forza motrice del campo; il suo valore è proporzionale, tanto al valore della forza, quanto all'incremento, che il potenziale subisce col tempo.*
Moltiplicando l'ultima delle (11) per $-ic$, essa si scrive (¹)

$$-i\,c\,\nu\,F_u = -\,\mathrm{div}\,S - \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\,. \tag{14a}$$

Quindi

$$-i\,c\,\nu\,F_u = i\,c\,\nu\,\frac{\partial \Phi}{\partial u} = \nu\,\frac{\partial \Phi}{\partial t} \tag{14b}$$

sarà l'energia, la quale, nell'unità di spazio e tempo, viene trasmessa dal campo alla materia.

Siccome poi, come risulta dalle tre prime delle (11),

$$\frac{i}{c}X_u \; , \; \frac{i}{c}Y_u \; , \; \frac{i}{c}Z_u$$

sono le componenti dell'*impulso unitario* (I) del campo gravitazionale, dalla (10*a*) segue (¹):

$$I = \frac{1}{c^2}\,S = \frac{1}{4\pi\gamma c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t}\,F\,. \tag{15}$$

La simmetria del tensore quattrodimensionale importa questa relazione generale tra la corrente dell'energia e l'impulso unitario (²).

(¹) Qui la velocità della luce è considerata come costante, trascurando l'influenza suindicata del potenziale.

(²) Il postulato, che non soltanto l'impulso elettromagnetico, ma anche l'impulso meccanico unitario di un campo sia sempre eguale al flusso corrispondente dell'energia, diviso per il quadrato di c, fu enunciata dal Planck, Physikalische Zeitschrift, 9 (1908), pag. 828.