ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1912

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 3 marzo 1912.

P. Blaserna Presidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sul gruppo automorfo delle forme ternarie quadratiche suscettibili di rappresentare lo zero.* Nota del Socio Luigi Bianchi.

1. Si sa che il gruppo automorfo di una forma ternaria quadratica indefinita, suscettibile di rappresentare lo zero, tradotto in un gruppo Fuchsiano col principio di Poincarè [1], dà luogo in ogni caso ad un gruppo *commensurabile* col gruppo modulare [2]. Scopo principale delle osservazioni seguenti è di far conoscere, nel caso di forme a determinante Δ dispari e privo di fattori quadrati, una forma particolarmente semplice delle sostituzioni di siffatto gruppo, ove i coefficienti sono resi tutti interi ed il modulo della sostituzione percorre i varî divisori di Δ, o questi divisori duplicati. La commensurabilità col gruppo modulare risulta così d'immediata evidenza, e si può inoltre calcolare subito l'area Ω *non-euclidea* del poligono fondamentale del gruppo. Questo mi porge l'occasione di addurre una formola più generale che, sempre nel caso di Δ dispari e privo di fattori quadrati, assegna l'area Ω del poligono fondamentale pel gruppo automorfo di una forma qualunque (di qualunque genere).

(1) *Les fonctions Fuchsiennes et l'Arithmétique*, Journal de Mathématiques, ser. 4, tom. III (1887).

(2) Vedi. Fricke-Klein, Automorphe Functionen, Bd. I, pp. 502 e seg.

L'area Ω del poligono fondamentale sembra invero sostituire opportunamente, per forme indefinite, il concetto di *densità* dovuto ad Eisenstein per una classe di forme definite.

Di siffatta estensione del concetto di densità e delle formole relative trovasi già un accenno nei celebri lavori di Minkowski [1].

2. Indichiamo con

$$f_{xx} = f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i,k}^{1\cdots 3} a_{ik}\, x_i\, x_k \qquad (a_{ik} = a_{ki})$$

una forma ternaria aritmetica (a coefficienti interi), che supponiamo indefinita ed a determinante Δ positivo. Indichiamo ancora con

$$F(x_1, x_2, x_3) = \sum_{ik} A_{ik}\, x_i\, x_k$$

la sua forma aggiunta, e facciamo inoltre uso delle notazioni

$$f_{x_i} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_k a_{ik}\, x_k$$

$$F_{x_i} = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x_i} = \sum_k A_{ik}\, x_k .$$

Per ottenere tutte le sostituzioni ternarie

$$(1) \qquad \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

del gruppo aritmetico automorfo della forma f_{xx}, si deve procedere, come è noto, nel modo seguente [2].

Prendansi tutte le quaderne

$$p, q_1, q_2, q_3$$

di numeri interi primi fra loro che soddisfano equazioni del tipo

$$(2) \qquad p^2 + F(q_1, q_2, q_3) = \varepsilon P ,$$

dove ε può essere l'unità positiva o negativa, e P percorre tutti i divisori

[1] Debbo queste informazioni alla gentilezza del prof. J. Sommer. Cfr. nelle opere di Minkowski i due passi seguenti: *Ueber positive quadratische Formen*, Bd. I, pag. 153; *Discontinuitätsbereich für arithmetische Aequivalenz*, Bd. II, pp. 54 seg.

[2] Vedi Bachmann, *Die Arithmetik der quadratischen Formen*, Ier Abschnitt, 4es Cap.

di 4Δ. I coefficienti c_{ik} delle sostituzioni (1) del gruppo automorfo sono allora dati dalle formole seguenti:

$$(3_1)\quad \begin{cases} P.c_{11} = p^2 - F(q_1, q_2, q_3) + 2pq_2\, a_{13} - 2pq_3\, a_{12} + 2q_1\, F_{q_1} \\ P.c_{12} = \qquad\qquad\qquad\qquad 2pq_2\, a_{23} - 2pq_2\, a_{23} + 2q_2\, F_{q_1} \\ P.c_{13} = \qquad\qquad\qquad\qquad 2pq_3\, a_{32} - 2pq_3\, a_{32} + 2q_3\, F_{q_1} \end{cases}$$

$$(3_2)\quad \begin{cases} P.c_{21} = \qquad\qquad\qquad\qquad 2pq_3\, a_{11} - 2pq_1\, a_{13} + 2q_1\, F_{q_2} \\ P.c_{22} = p^2 - F(q_1, q_2, q_3) + 2pq_3\, a_{21} - 2pq_1\, a_{23} + 2q_2\, F_{q_2} \\ P.c_{23} = \qquad\qquad\qquad\qquad 2pq_3\, a_{31} - 2pq_1\, a_{33} + 2q_3\, F_{q_2} \end{cases}$$

$$(3_3)\quad \begin{cases} P.c_{31} = \qquad\qquad\qquad\qquad 2pq_1\, a_{12} - 2pq_2\, a_{11} + 2q_1\, F_{q_3} \\ P.c_{32} = \qquad\qquad\qquad\qquad 2pq_1\, a_{22} - 2pq_2\, a_{21} + 2q_2\, F_{q_3} \\ P.c_{33} = p^2 - F(q_1, q_2, q_3) + 2pq_1\, a_{32} - 2pq_2\, a_{31} + 2q_3\, F_{q_3}. \end{cases}$$

I numeri p, q_1, q_2, q_3 sono poi da assoggettarsi, oltre che alla equazione (2), alle condizioni (congruenze mod P) le quali esprimono che i valori dei coefficienti c_{ik} dati da queste formole (3) riescono interi.

Fra le sostituzioni del gruppo automorfo sono da distinguersi quelle con $\varepsilon = +1$, che diciamo di *1ª specie*, da quelle con $\varepsilon = -1$ di *2ª specie*; nelle formole (3) esse si distinguono per ciò che le prime sono scritte con determinante $+1$, le seconde con determinante -1. Geometricamente queste sostituzioni dànno collineazioni del piano che trasformano in sè medesima la conica $f_{xx} = 0$, e le due specie differiscono per ciò che nella prima specie la proiettività subordinata sulla conica è concorde, nella seconda discorde.

3. Suppongasi ora che il determinante dispari Δ sia privo di fattori quadrati e inoltre per la forma f_{xx} sia rappresentabile lo zero. Le forme di questo tipo costituiscono, come si sa, una sola classe e sono per ciò tutte equivalenti alla forma tipica

$$2\, x_1 x_3 - \Delta x_2^2 .$$

Non sarà fuor di luogo osservare che questo teorema, caso particolare di risultati generali dovuti ad A. Meyer, si può già stabilire col primo procedimento di riduzione di cui si è servito Gauss nelle *Disquisitiones Aritmeticae* (art. 272) per dimostrare che è finito il numero delle forme di un dato determinante. Poichè la forma f_{xx} rappresenta lo zero, possiamo sostituirla con una equivalente, in cui sia nullo il primo coefficiente

$$a_{11} = 0 .$$

Applicando a questa una sostituzione del tipo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ interi e $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, e prendendo α, γ per modo che sia

$$a_{12}\alpha + a_{13}\gamma = 0,$$

risulterà nella trasformata f'

$$a'_{11} = 0 \quad , \quad a'_{12} = 0 .$$

Possiamo dunque già supporre in f

$$a_{11} = 0 \quad , \quad a_{12} = 0 ,$$

onde avendosi

$$\Delta = - a_{22} \, . \, a_{13}^2 ,$$

ed essendo per ipotesi Δ privo di fattori quadrati, sarà

$$a_{13} = \pm 1 \quad , \quad a_{22} = - \Delta .$$

Senza alterare la generalità, potremo supporre $a_{13} = +1$ (cangiando nel caso contrario i segni di x_1, x_3); così

$$a_{11} = 0 \quad , \quad a_{12} = 0 \quad , \quad a_{13} = 1 \quad , \quad a_{22} = - \Delta .$$

Dopo ciò eseguiamo una sostituzione del tipo

$$\begin{pmatrix} 1 , \alpha , \beta \\ 0 , 1 , \gamma \\ 0 , 0 , 1 \end{pmatrix},$$

con α, β, γ interi arbitrarii; per la forma trasformata f' avremo

$$a'_{11} = 0 \quad , \quad a'_{12} = 0 \quad , \quad a'_{13} = 1 \quad , \quad a'_{22} = - \Delta$$

$$a'_{23} = a_{23} + \alpha - \Delta\gamma \quad , \quad a'_{33} = a_{33} - \Delta\gamma^2 + 2\beta + 2a_{23}\gamma .$$

Ora, se a_{33} è pari, pongasi

$$\gamma = 0 \, , \quad \alpha = - a_{23} \quad , \quad \beta = - \frac{a_{33}}{2} ,$$

e quando a_{33} è invece dispari

$$\gamma = 1 \quad , \quad \alpha = \Delta - a_{23} \quad , \quad \beta = - a_{23} + \frac{\Delta - a_{32}}{2} ;$$

così in ogni caso avremo anche

$$a'_{23} = 0 \quad , \quad a'_{23} = 0$$

e la forma proposta sarà trasformata nella equivalente

$$f = 2\,x_1\,x_3 - \Delta x_2^2\,,$$

come si voleva.

4. I gruppi automorfi di forme equivalenti essendo simili, basterà ricercare il gruppo della forma

$$2\,x_1\,x_3 - \Delta x_2^2\,.$$

Applichiamo per ciò le formole generali (3) del n. 2, osservando che qui

$$\mathrm{F} = 2\,\Delta x_1\,x_3 - x_2^2\,.$$

La (2) diventa

$$p^2 + 2\,\Delta q_1\,q_3 - q_2^2 = \varepsilon \mathrm{P} \tag{4}$$

e le (3) ci dànno

$$\left\{\begin{array}{lll} \mathrm{P}c_{11} = (p+q_2)^2 & , \mathrm{P}c_{12} = 2\,\Delta q_3(p+q_2) & , \mathrm{P}c_{13} = 2\Delta q_3^2 \\ \mathrm{P}c_{21} = -\,2q_1(p+q_2) & , \mathrm{P}c_{22} = 2(p^2-q_2^2) - \varepsilon\mathrm{P} & , \mathrm{P}c_{23} = 2q_3(p-q_2) \\ \mathrm{P}c_{31} = 2\Delta q_1^2 & , \mathrm{P}c_{32} = -\,2\Delta q_1(p-q_2) & , \mathrm{P}c_{33} = (p-q_2)^2\,. \end{array}\right. \tag{5}$$

Il numero P, che in generale doveva percorrere i divisori di 4Δ, qui dovrà limitarsi a percorrere i soli divisori di 2Δ, poichè se P fosse divisibile per 4 non potrebbero riuscire interi i coefficienti c_{ik} con $p\,,q_1\,,q_2\,,q_3$ primi fra loro. E infatti se P è divisibile per 4, i valori dati dalle (5) per $c_{11}\,,c_{33}\,,c_{13}\,,c_{31}$ saranno interi solo quando siano pari

$$p+q_2 \quad , \quad p-q_2 \quad , \quad q_1\,,q_3\,.$$

D'altronde dalla (4), scritta sotto la forma

$$\frac{p+q_2}{2}\,.\,\frac{p-q_2}{2} + 2\Delta\,\frac{q_1}{2}\,.\,\frac{q_3}{2} = \varepsilon\,\frac{\mathrm{P}}{4}\,,$$

dacchè $\frac{\mathrm{P}}{4}$ divisore di Δ è dispari, risulterebbero dispari

$$\frac{p+q_2}{2} \quad , \quad \frac{p-q_2}{2}\,,$$

e per ciò pari $p\,,q_2$, che non sarebbero dunque primi con $q_1\,,q_3$.

Dunque deve essere P un divisore di 2Δ, e se indicheremo con

$$\Delta = r\,.\,s$$

una qualunque decomposizione di Δ nel prodotto di Δ di due fattori, i valori di P saranno della forma

$$P = 2^{\lambda} . r, \quad \text{con} \quad \lambda = 0, \quad \text{oppure} \quad \lambda = 1.$$

Si osservi ora che dalle formole (5) per c_{11}, c_{33} risulta che $p + q_2$, $p - q_2$ debbono essere divisibili per r, ed inoltre pari quando $\lambda = 1$; così poniamo

$$p + q_2 = r\alpha \quad , \quad p - q_2 = r\delta$$

con α, δ interi, che saranno inoltre ambedue pari quando $\lambda = 1$. Se poniamo ancora per simmetria

$$q_1 = \gamma \quad , \quad q_3 = \beta,$$

saranno α, β, γ, δ quattro interi legati dall'unica relazione

$$(6) \qquad r\alpha\delta + 2s\beta\gamma = \varepsilon . 2^{\lambda} \qquad (\lambda = 0, 1)$$

e inoltre dalle congruenze

$$(6^*) \qquad \alpha \equiv \delta \equiv 0 \pmod 2 \qquad \text{quando } \lambda = 1.$$

Così effettivamente i nove coefficienti c_{ik} riescono tutti interi e presentano lo schema seguente:

$$(7) \qquad \begin{pmatrix} \dfrac{r\alpha^2}{2^{\lambda}} & , & 2^{1-\lambda}\Delta\alpha\beta & , & 2^{1-\lambda}s\beta^2 \\ -2^{1-\lambda}\alpha\gamma & , & 2^{1-\lambda}r\alpha\delta - \varepsilon & , & 2^{1-\lambda}\beta\delta \\ 2^{1-\lambda}s\gamma^2 & , & -2^{1-\lambda}\Delta\alpha\gamma & , & \dfrac{r\delta^2}{2^{\lambda}} \end{pmatrix}.$$

Si osservi ora che se $\lambda = 0$ risultano α, δ per la (6) necessariamente dispari e nello schema (7) i coefficienti della diagonale principale sono dispari, gli altri tutti pari, sicchè la sostituzione soddisfa alla congruenza (mod 2)

$$(a) \qquad \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod 2 \qquad (\lambda = 0).$$

Quando invece $\lambda = 1$, allora α, δ sono pari per la (6^*), indi per la (6) β, γ dispari; i coefficienti della diagonale secondaria sono dispari, gli altri tutti pari, cioè

$$(a^*) \qquad \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \pmod 2.$$

Le sostituzioni del gruppo automorfo della forma $2x_1x_3 - \Delta x_2^2$ soddisfano dunque di necessità o alla congruenza (a) o alla (a^*), come è facile dimostrare anche con considerazione diretta. Manifestamente quelle del tipo (a) formano un sottogruppo invariante d'indice 2.

5. Traduciamo ora il gruppo ternario (7) di collineazioni della conica $2x_1x_3 - \Delta x_2^2 = 0$ in sè in un gruppo Fuchsiano, secondo il principio di Poincarè (metrica del Cayley).

Per questo riduciamo in primo luogo, colla sostituzione di variabili

$$2x_1 = y_1 \quad , \quad x_2\sqrt{\Delta} = y_2 \quad , \quad x_3 = y_3$$

la forma $2x_1x_3 - \Delta x_2^2$ alla forma canonica

$$y_1y_3 - y_2^2 .$$

Le sostituzioni del gruppo *algebrico* riproduttivo di questa forma sono date da

$$(8) \qquad \begin{cases} y_1' = A^2 y_1 + 2AB y_2 + B^2 y_3 \\ y_2' = AC y_1 + (AD + BC) y_2 + BD y_3 \\ y_3' = C^2 y_1 + 2CD y_2 + D^2 y_3 , \end{cases}$$

dove A, B, C, D sono costanti reali, con determinante

$$AD - BC = +1$$

per collineazioni di 1ª specie, e

$$AD - BC = -1$$

per collineazioni di 2ª specie.

Queste sostituzioni significano movimenti, o movimenti e simmetrie, della metrica Cayleyana e tradotte in sostituzioni lineari sulla variabile complessa z, o rispettivamente sulla coniugata z_0, diventano

$$(9) \qquad \begin{cases} z' = \dfrac{Az + B}{Cz + D} , \quad AD - BC = +1 \quad (1^a \text{ specie}) \\ z' = \dfrac{Az_0 + B}{Cz_0 + D} , \quad AD - BC = -1 \quad (1^e \text{ specie}). \end{cases}$$

Se scriviamo la (8) nelle primitive variabili x, abbiamo

$$\begin{cases} x_1' = A^2 x_1 + AB\sqrt{\Delta}\, x_2 + \dfrac{B^2}{2} x_3 \\ x_2' = \dfrac{2AC}{\sqrt{\Delta}} x_1 + (AD + BC) x_2 + \dfrac{BD}{\sqrt{\Delta}} x_3 \\ x_3' = 2C^2 x_1 + 2CD\sqrt{\Delta}\, x_2 + D^2 x_3 , \end{cases}$$

e, paragonando collo schema (7), ne deduciamo i corrispondenti valori di A, B, C, D, a meno di un cangiamento simultaneo di segno, cioè

$$A = \frac{\alpha\sqrt{r}}{\sqrt{2^\lambda}}\ ,\quad B = \frac{2\beta\sqrt{s}}{\sqrt{2^\lambda}}$$

$$C = -\frac{\gamma\sqrt{s}}{\sqrt{2^\lambda}}\ ,\quad D = \frac{\delta\sqrt{r}}{\sqrt{2^\lambda}}\ .$$

Sostituendo nelle formole (9), e cangiando le variabili z, z' rispettivamente in $z\sqrt{\Delta}, z'\sqrt{\Delta}$, otteniamo la seguente semplice forma delle sostituzioni del nostro gruppo Fuchsiano

$$\text{(I)}\qquad z' = \frac{r\alpha\,.\,z + 2\beta}{-\Delta\gamma\,.\,z + r\delta}\ ,\quad r\alpha\delta + 2s\beta\gamma = 2^\lambda \qquad (\lambda = 0\,,1)$$

$$\text{(I*)}\qquad z' = \frac{r\alpha z_0 + 2\beta}{-\Delta\gamma z_0 + r\delta}\ ,\quad r\alpha\delta + 2s\beta\gamma = 2^\lambda \qquad (\lambda = 0\,,1)$$

colla condizione

$$\alpha \equiv \delta \equiv 0 \pmod 2 \quad \text{se} \quad \lambda = 1.$$

Qui ricordiamo che r, s devono percorrere tutte le coppie corrispondenti alle decomposizioni di Δ

$$\Delta = rs$$

nel prodotto di due fattori.

Come si vede, le sostituzioni del gruppo hanno acquistato tutte coefficienti interi e determinante $= \pm 2^\lambda r$ (1).

Indichiamo con G il gruppo (Fuchsiano) di tutte le sostituzioni (V), con Γ il sottogruppo, invariante d'indice 2, corrispondente a $\lambda = 0$, in fine con H quell'ulteriore sottogruppo di Γ che si ottiene prendendo le sole sostituzioni con $r = 1$.

Le sostituzioni di H hanno la forma

$$\text{H)}\qquad z' = \frac{\alpha z + 2\beta}{-\Delta\gamma z + \delta}\ ,\quad \alpha\delta + 2\Delta\beta\gamma = 1\,,$$

(1) Che le sostituzioni della forma (I), (I*) formino gruppo si accerta con facilità direttamente. Si osserva che, componendo due tali sostizioni corrispondenti alle decomposizioni

$$\Delta = rs\ ,\quad \Delta = r's',$$

la composta ha ancora la forma (I) o (I*), e corrisponde alla decomposizione

$$\Delta = r''s'',$$

dove $r'' = \frac{rr'}{\sigma^2}$, essendo σ il massimo comune divisore di r, r'.

ed H coincide manifestamente con quel sottogruppo congruenziale $\begin{pmatrix} a, b \\ c, d \end{pmatrix}$ del gruppo modulare M, che è definito da

$$b \equiv 0 \pmod 2 \qquad c \equiv 0 \pmod{\Delta}.$$

È facile valutare l'indice di H in Γ ed in G: poichè se Δ è il prodotto di n fattori primi diversi

$$\Delta = p_1 p_2 \dots p_n,$$

l'indice di H in Γ è dato dal numero dei divisori di Δ ed è quindi $= 2^n$, onde l'indice di H in G è dato da 2^{n+1}.

Così pure si determina subito l'indice di H nel gruppo modulare, che è dato da

$$3(p_1 + 1)(p_2 + 1) \dots (p_n + 1).$$

Se indichiamo poi con G_0, H_0, M_0 i rispettivi gruppi ampliati da G, H, M mediante la riflessione $z' = -z_0$ (cioè col considerare insieme alle (I) anche le (I*)), sarà H_0 sottogruppo comune di G_0, M_0 ed avrà nel primo l'indice $= 2^{n+1}$ e nel secondo l'indice dato da

$$3(p_1 + 1)(p_2 + 1) \dots (p_n + 1).$$

Così è posta perfettamente in evidenza la commensurabilità del gruppo automorfo per le forme ternarie suscettibili di rappresentare lo zero col gruppo modulare.

6. Una forma ternaria indefinita qualunque f ha un gruppo automorfo infinito, al quale appartiene, nella metrica del Cayley, un determinato *poligono fondamentale*. Se, per fissare le idee, prendiamo $= -1$ la curvatura della metrica iperbolica del Cayley, l'area Ω del poligono fondamentale è perfettamente determinata. Il valore di Ω, che è un attributo comune a tutte le forme della classe C di f, si assumerà come misura della *densità* della classe. Questo si giustifica colle osservazioni seguenti.

Le forme della classe C si ottengono applicando ad f le infinite sostituzioni ternarie unimodulari, ma ciascuna forma si trova ripetuta un numero infinito di volte, corrispondentemente alle infinite sostituzioni del gruppo automorfo, cioè ai singoli poligoni equivalenti della rete in cui le sostituzioni del gruppo dividono l'interno della conica assoluto. La classe C è dunque da riguardarsi tanto più densa in forme quanto più è ristretto il gruppo, vale a dire quanto più grande è l'area Ω del poligono fondamentale.

Sembra dunque naturale di assumere Ω come misura della densità della classe.

Tornando ora alla forma annullantesi

$$2x_1x_3 - x_2^2$$

è facile valutare qui Ω, o come scriveremo Ω_{G_0} per significare l'area del poligono fondamentale di G_0 [1]. Poichè H_0 è sottogruppo d'indice 2^{n+1} in G_0, sarà

$$\Omega_{G_0} = \frac{1}{2^{n+1}} \Omega_{H_0},$$

ed essendo d'altra parte H_0 sottogruppo d'indice $3(p_1+1)(p_2+1)\dots(p_n+1)$ nel gruppo modulare ampliato M_0, sarà

$$\Omega_{H_0} = 3(p_1+1)(p_2+1)\dots(p_n+1) \,.\, \Omega_{M_0}.$$

Ma il triangolo fondamentale di M_0 ha, come è ben noto, gli angoli $0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$, onde

$$\Omega_{M_0} = \pi\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{6},$$

e sostituendo abbiamo per la densità cercata

$$\text{(II)} \qquad \Omega = \frac{\pi}{2^{n+2}}(p_1+1)(p_2+1)\dots(p_n+1).$$

Questa formola, così stabilita per via elementare, non è che un caso particolare delle formole che dànno la densità Ω per una classe qualunque di forme ternarie indefinite, analoghe alle ben note di Eisenstein per le forme definite.

Così per es. se supponiamo soltanto che il determinante Δ sia dispari e privo di fattori quadrati:

$$\Delta = p_1, p_2, \dots p_n,$$

è noto che esistono 2^n generi corrispondenti alle possibili determinazioni dei caratteri

$$\left(\frac{-F}{p_1}\right), \left(\frac{-F}{p_2}\right), \dots, \left(\frac{-F}{p_n}\right),$$

[1] In generale per un gruppo qualunque K indicheremo con Ω_K l'area del poligono fondamentale.

e in ciascun genere esiste una sola classe. Introducendo ancora il carattere supplementare o derivato

$$E = \left(\frac{-F}{p_1}\right), \left(\frac{-F}{p_2}\right), \ldots \left(\frac{-F}{p_n}\right),$$

la densità Ω della classe (area del poligono fondamentale) è data dalla formola

$$\text{(III)} \quad \Omega = \frac{(2+E)\pi}{3 \,.\, 2^{n+2}} \left\{p_1 + \left(\frac{-F}{p_1}\right)\right\} \cdot \left\{p_2 + \left(\frac{-F}{p_2}\right)\right\} \cdots \left\{p_n + \left(\frac{-F}{p_n}\right)\right\}.$$

Quando la classe è quella delle forme suscettibili di rappresentare lo zero, tutti i caratteri sono eguali a $+1$ e la (III) si riduce alla (II). La dimostrazione della formola (III) e delle analoghe nel caso generale si può trarre dalle citate ricerche di Minkowski, applicando i metodi analitici di Dirichlet.

Qui ci limiteremo ad osservare che nei dieci esempî di poligoni fondamentali calcolati da Fricke per forme *non annullantesi*, da pp. 554 a 565 del 1° volume delle *Automorphe Functionen*, la formola (III) dà esattamente l'area del poligono corrispondente.

Così per es. per la forma

$$f = 3x_1^2 - 5x_2^2 - x_3^2$$

si ha

$$\Delta = 15 \quad , \quad F = 5x_1^2 - 3x_2^2 - 15x_3^2$$

$$n = 2 \quad , \quad p_1 = 3 \quad , \quad p_2 = 5 \quad , \quad \left(\frac{-F}{3}\right) = \left(\frac{-5}{3}\right) = +1$$

$$\left(\frac{-F}{5}\right) = \left(\frac{3}{5}\right) = -1,$$

indi $E = -1$ e la (III) dà

$$\Omega = \frac{\pi}{3}.$$

Il poligono fondamentale, calcolato da Fricke, è un quadrilatero con tre angoli eguali a $\frac{\pi}{2}$ ed uno eguale a $\frac{\pi}{6}$; la sua area è dunque in effetto

$$\pi\left(2 - \frac{3}{2} - \frac{1}{6}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

Matematica. — *Sulle superficie minime cerchiate di Riemann.* Nota del Socio L. Bianchi.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.