ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1912

La (3) si scriverà:

$$F(x) + \lambda \int_{-1}^{+1} \{k(y) + x^3 H(x, y)\} F(y)\, dy =$$
$$= \psi(0) + x^3 \varphi(x) - [K(0, 0) + x^3 h(x)] \int_{-1}^{+1} \frac{F(y)}{y^3}\, dy .$$

Ne segue che necessariamente dovremo supporre $F(x) = F(0) + x^3 G(x)$, dove la $G(x)$ è finita. Posto quindi

$$B = \int_{-1}^{+1} F(y) \frac{dy}{y^3} = \int_{-1}^{+1} G(x)\, dx + F(0)\, C ,$$

ove

$$C = \int_{-1}^{+1} \frac{dy}{y^3} = \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon, \eta = 0} \left(\frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{1}{\eta^2} \right),$$

la trattazione continua come sopra.

Matematica. — *Sull'integrabilità delle funzioni di due variabili*. Nota del dott. LUCIANO ORLANDO, presentata dal Corrispondente A. DI LEGGE.

È noto da parecchio tempo che una funzione $f(x, y)$, la quale sia continua in x per ogni y fisso, e continua in y per ogni x fisso, può benissimo non essere continua nelle due variabili considerate insieme. Tale è, per esempio, una funzione che valga zero nell'origine, e valga $\frac{xy}{x^2 + y^2}$ in ogni altro punto del piano. Sulla retta fissa $y = mx$, anche nelle più immediate vicinanze dell'origine, la funzione conserva costantemente il valore $\frac{m}{1 + m^2}$, dunque è (tranne che sugli assi) radialmente discontinua.

Non altrettanto felice è, per verità, l'esempio $\frac{x^2}{x^2 + y^2}$, dato da alcuni autori.

Ma noi non vogliamo qui insistere sopra cose ben note; vogliamo piuttosto esporre alcune considerazioni, che s'inquadrano in ricerche molto più complicate ed estese, sulle quali ha richiamato la mia attenzione il valente scienziato prof. G. Giorgi.

Costruiremo una funzione $f(x, y)$, delle due variabili x, y, la quale, pur essendo integrabile (secondo Riemann) in dx per ogni y fisso, ed in dy per ogni x fisso, non si presta tuttavia all'integrazione doppia.

Consideriamo un quadrato, che abbia un vertice nell'origine, e il vertice opposto nel punto di coordinate $1 , 1$. Definiamo una funzione $F(x , y)$ come segue:

a) Sia nulla sui lati, ed in ogni punto interno che abbia almeno una coordinata irrazionale;

b) Nei punti interni $x = \frac{m}{n}$, $y = \frac{p}{q}$ (frazioni supposte irriducibili) essa valga $\frac{n}{q}$ per $n \leqq q$, e valga $\frac{q}{n}$ per $n \geqq q$.

Allora, fissato $y = \frac{p}{q}$, la funzione $F\left(x , \frac{p}{q}\right)$, della variabile x, è evidentemente integrabile in dx; essa è infatti in condizioni d'integrabilità più vantaggiose di una funzione $\varphi(x)$ destinata ad assumere, nell'intervallo $(0 , 1)$, il valore zero per ogni x irrazionale, e il valore $\frac{q}{\nu}$ per ogni x razionale $= \frac{\mu}{\nu}$ (frazione supposta irriducibile). Ora è nota e manifesta l'integrabilità Riemanniana di questa funzione.

Si dimostra facilmente che la funzione $F(x , y)$ è discontinua in ogni punto del quadrato. In un quadratino arbitrariamente piccolo, interno al quadrato, esistono punti con valori irrazionali di x e di y, ed ivi $F(x , y)$ è zero. Esiste poi sempre, nell'interno del quadratino, uno almeno fra due punti che hanno le rispettive coordinate del tipo

$$x_1 = \frac{2h-1}{2^n} \;,\quad y_1 = \frac{2k-1}{2^n} \;;\quad x_2 = \frac{2h+1}{2^n} \;,\quad y_2 = \frac{2k+1}{2^n} \;,$$

dove $F(x , y)$ vale 1. Basterà che n sia abbastanza alto.

La funzione $F(x , y)$, simmetrica nelle due variabili x , y, che abbiamo ora costruita, verifica le relazioni

$$\int_0^1 F\left(x , \frac{p}{q}\right) dx = 0 \qquad \int_0^1 F\left(\frac{m}{n} , y\right) dy = 0$$

e, più generalmente,

$$\int_0^1 F(x , y)\, dx = 0 \qquad \int_0^1 F(x , y)\, dy = 0 ,$$

e poi

$$\int_0^1 dx \int_0^1 F(x , y)\, dy = 0 \qquad \int_0^1 dy \int_0^1 F(x , y)\, dx = 0 ;$$

eppure non esiste l'integrale doppio Riemanniano

$$\iint F(x , y)\, dx\, dy$$

esteso alla superficie del quadrato.

Ripeto che ciò s'inquadra in ricerche, più estese, di calcolo funzionale, che il prof. Giorgi mi ha cortesemente accennate.